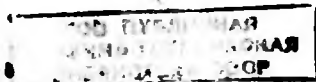


В. В. АПСИТ

СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
РИГА 1959



2675¹⁰/₆₀

III

19327

K32.8

59.28

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в электромашиностроительной технике заметно возрос интерес к синхронным машинам с когтеобразными полюсами. Эта своеобразная конструкция в настоящее время широко используется в бесконтактных сельсинах, в электроснабжении транспорта (железнодорожных вагонов, автомобилей, автобусов) и в электромагнитных муфтах скольжения, применяемых в экскаваторном приводе, в нефтедобывающей промышленности и т. п. Имеется также значительное число предложений по использованию когтеобразных полюсов в машинах с постоянными магнитами, в синхронных генераторах и электродвигателях общепромышленного применения, в бесконтактных генераторах постоянного тока и т. п. Область применения машин с когтеобразными полюсами, таким образом, быстро расширяется.

Однако вопросы теории, связанные с исследованием и проектированием машин с когтеобразными полюсами, пока еще мало развиты, хотя, как показывают исследования и опыт, эти машины весьма значительно отличаются от других конструктивных разновидностей явнополюсных машин. Поэтому теория машин с когтеобразными полюсами, помимо общих положений, должна содержать еще целый ряд специальных разделов, раскрывающих серьезные особенности, свойственные этим своеобразным машинам.

Настоящая книга представляет попытку изучения физической сущности машин с когтеобразными полюсами, причем рассматриваются также некоторые вопросы их теории. Следует заметить, что монография далеко не исчерпывает вопроса и не дает пока прямых практических рекомендаций, которые можно было бы использовать непосредственно при проектировании машин с когтеобразными полюсами. Ввиду сложности электромагнитных явлений в этих машинах основное внимание уделено разработке методов исследования и почти совсем не затронуты практические результаты этих исследований. Поэтому данную работу следует считать в основном методологи-

ческим введением в теорию машин, с когтеобразными полюсами. К вопросам самой теории, а также практики проектирования и эксплуатации таких машин автор надеется вернуться в дальнейшем.

Автор выражает свою признательность доктору технических наук профессору Г. И. Штурману, кандидату технических наук Э. А. Якубайтису, внимательно просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, а также З. К. Сике, И. Р. Калниню, И. О. Барбану, Г. Н. Лауцису, З. Э. Пайчу, Р. Э. Балам и П. П. Таурино, сделавшим большую техническую работу при подготовке рукописи к печати.

Все замечания просьба направлять по адресу: г. Рига, ул. Мейстару, 10, Институт энергетик и электротехники Академии наук Латвийской ССР.

ВВЕДЕНИЕ

Термином *синхронная машина с когтеобразными полюсами* принято обозначать одну из конструктивных разновидностей синхронных машин, характеризующуюся применением своеобразных несимметричных полюсов, несколько напоминающих по форме коготь (рис. 1). Помимо этого наименования, в литературе встречается целый ряд других. Так, сами полюса часто не без оснований называют *клювообразными*, а ротор в целом — *панцирным, гребенчатым, пальчиковым, крабообразным*. В американской литературе конструкция, изображенная на рис. 1, иногда именуется *overlap tooth* (с перекрывающимися зубцами), а чаще не имеет вообще никакого специального названия. В немецких источниках наиболее распространен термин *klauenförmig* (когтеобразный), однако встречается и другие, как например *Polhöfner* (полюсные рога). Трудно определить, который из перечисленных терминов наиболее удачный, поэтому в настоящей книге принят просто старейший из них, известный еще с 90-х годов прошлого века.

Магнитная система ротора с когтеобразными полюсами (рис. 1) обычно состоит из посаженной на вал цилиндрической втулки B и двух полюсных систем $ПС_N$ и $ПС_S$ представляющих собой стальные отливки или поковки в виде колец K_N или K_S с полюсными выступами $П_N$ и $П_S$. Полюсные системы устанавливаются с обеих сторон втулки B и располагаются на ней таким образом, чтобы полюсные выступы одной системы разместились в промежутках между полюсными выступами другой. Обмотка возбуждения когтеобразного ротора выполняется в виде одной круглой катушки KB , витки которой охватывают втулку B и располагаются в пространстве между скошенными поверхностями когтеобразных полюсов и наружной поверхностью втулки ротора. Катушка KB возбуждает во втулке B аксиальный магнитный поток, направленный от одного торца втулки к другому. С торцов втулки поток переходит в кольца K_N или K_S соответствующих полюсных систем, и затем распределяется по их отдельным полюсам и,

пройдя по ним, выходит в воздушный зазор и в статор машины. Поскольку при этом направление потока в полюсных системах $ПС_N$ и $ПС_S$ различное (в одной системе от втулки к статору, а в другой — от статора к втулке), а полюса разных полюсных систем чередуются вдоль окружности ротора, то в зазоре машины получается нормальное чередование полюсов северной и южной полярности. Поэтому процесс индуктирова-

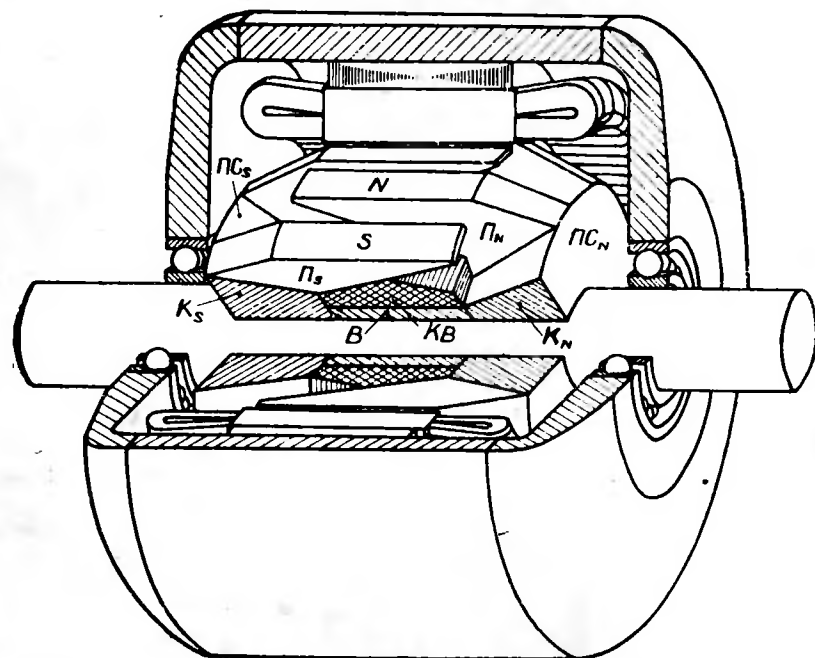


Рис. 1. Синхронная машина с когтеобразными полюсами:

$В$ — центральная втулка; $ПС_N$ и $ПС_S$ — полюсные системы северной и южной полярности; $К_N$ и $К_S$ — сборные кольца полюсных систем; $П_N$ и $П_S$ — когтеобразные полюса северной и южной полярности; $КВ$ — катушка возбуждения.

ния э. д. с. в обмотке статора в машинах с когтеобразными полюсами качественно не отличается от аналогичного процесса в обычных машинах.

Серьезным достоинством ротора с когтеобразными полюсами являются его конструктивная простота и хорошие экономические показатели.

При применении когтеобразного ротора нет необходимости отдельно изготавливать и закреплять на нем каждый из $2p$ полюсов и катушек: полюса изготавливаются в виде двух отли-

вок, а катушка требуется всего одна и к тому же весьма простой формы. Наличие только одной катушки значительно уменьшает вес меди обмотки возбуждения и снижает расход энергии, необходимой для ее питания.

Другим важным преимуществом когтеобразной конструкции является возможность выполнения ее без вращающихся обмоток и без щеточно-контактных устройств. В этом случае общий поток полюсов из кольца $К_S$ направляется к кольцу $К_N$ не по кратчайшему пути вдоль втулки ротора $В$, а разводится еще дальше в стороны и замыкается по внешней магнитной цепи — через щиты и станину. При такой конструк-

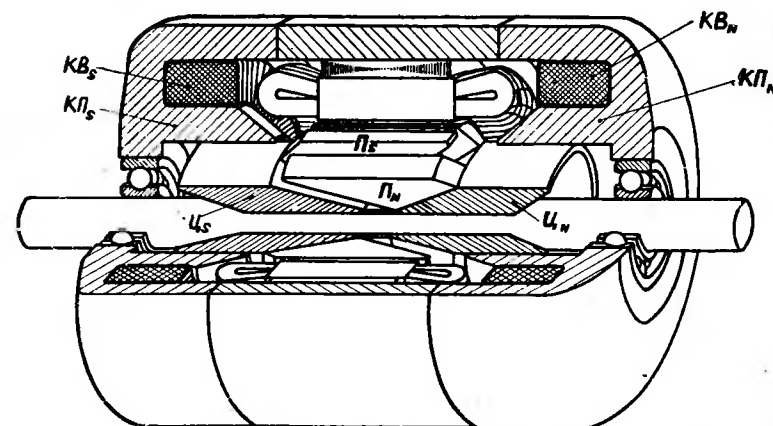


Рис. 2. Бесконтактная синхронная машина с внешним магнитопроводом:

$Ц_N$ и $Ц_S$ — цилиндры северной и южной полярности; $П_N$ и $П_S$ — когтеобразные полюса; $КП_N$ и $КП_S$ — кольцообразные приливы; $КВ_N$ и $КВ_S$ — катушки возбуждения.

ции (рис. 2) ротор выполняется в виде двух стальных цилиндров $Ц_N$ и $Ц_S$, снабженных когтеобразными полюсными выступами $П_N$ и $П_S$. На подшипниковых щитах имеются кольцевые приливы $КП_N$ и $КП_S$, которые с небольшим зазором охватывают цилиндры ротора и служат для передачи магнитного потока от щита к ротору или обратно. Обмотка возбуждения выполняется в виде двух круглых катушек $КВ_N$ и $КВ_S$, размещенных в пространстве между внешней поверхностью прилива $КП$ и внутренней поверхностью подшипникового щита.

В бесконтактной конструкции, ввиду наличия дополнительных воздушных зазоров и более длинного пути магнитного потока, экономические преимущества когтеобразного ротора, выражающиеся в уменьшении расхода меди и энергии на

возбуждение, в известной мере снижаются. Кроме того, некоторым неудобством этой конструкции является необходимость выполнения станины и подшипниковых цитов из ферромагнитного материала. Однако, несмотря на эти недостатки, бесконтактная конструкция синхронной машины с когтеобразными полюсами при правильном проектировании оказывается вполне конкурентноспособной с другими разновидностями синхронных машин и в ряде случаев практически не уступает им по весовым и экономическим показателям, обладая в то же время весьма важными эксплуатационными преимуществами — высокой надежностью в работе и не требовательностью к обслуживанию. Поэтому данная конструкция представляет большой практический интерес, особенно в тех случаях, когда машина предназначена для работы в условиях отсутствия надзора и обслуживания.

Как видно из изложенного выше, использование когтеобразных полюсов в ряде случаев позволяет придать машине такие свойства, которые далеко не всегда можно получить в обычных, широко распространенных конструкциях. Именно поэтому машина с когтеобразными полюсами находит применение тогда, когда малый расход меди и энергии на возбуждение и полное отсутствие скользящих контактов являются по тем или иным причинам решающими качествами. Следует, правда, заметить, что подобные свойства можно получить и при использовании некоторых других конструкций, например машин с постоянными магнитами или одноименнополюсных индукторных. Однако машины этих конструкций приобретают указанные преимущества за счет ухудшения других качеств: в индукторных генераторах — за счет повышенного расхода стали пакета статора, а в машинах с постоянными магнитами — за счет серьезного усложнения регулирования и снижения электромагнитных нагрузок машины. Машины с когтеобразными полюсами лишены этих недостатков, и поэтому использование когтеобразной конструкции может в принципе дать больший практический эффект при меньших материальных затратах.

Появившиеся еще в конце прошлого века машины с когтеобразными полюсами вначале получили довольно широкое распространение как синхронные генераторы значительных по тому времени мощностей. Однако в дальнейшем они были быстро вытеснены развивающимися явнополюсными машинами. После этого когтеобразная конструкция оказалась почти полностью забытой и долгое время считалась устаревшей. Однако в последние годы интерес к ней вновь возрос, и сейчас даже трудно перечислить все те отрасли, где она применяется. Бесконтактные сельсины, машины с постоянными магнитами,

генераторы для электроснабжения автотранспорта, железнодорожных вагонов и самолетов, электромагнитные муфты скольжения, генераторы дизель-электрических установок, бесконтактные синхронные двигатели с асинхронным пуском, бесконтактные генераторы переменного и постоянного тока — это, по-видимому, неполный перечень разновидностей электрических машин, в которых используется в настоящее время когтеобразная конструкция.

Несмотря, однако, на быстрый рост применения когтеобразной конструкции машины, сведения об особенностях и возможностях ее недостаточны; слабо развиты также теория и методы ее расчета. Эти пробелы предполагается в некоторой мере восполнить в настоящей книге.

ГЛАВА I

КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ И ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИМЕНЕНИИ КОНСТРУКЦИИ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Конструкция синхронной машины с когтеобразными полюсами появилась еще на заре электромашиностроения, когда современные установившиеся конструктивные модификации машин еще не получили достаточного признания или даже вовсе не были известны.

1. НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Исходным пунктом развития когтеобразной конструкции следует, по-видимому, считать машину (рис. 3), сконструированную в 1882 г. харьковчатином Александром Клименко и построенную фирмой «Компани Электрик» (Compagnie Électrique). Ротор этой машины представлял собой посаженный на вал цилиндрический стальной сердечник, к торцам которого примыкали две крестовины, несколько напоминавшие по форме полюсные системы с когтеобразными полюсами. Вокруг сердечника располагалась неподвижная катушка возбуждения цилиндрической формы. При питании этой катушки постоянным током происходило намагничивание сердечника в аксиальном направлении, в результате чего одна из крестовин получала северную полярность, а другая — южную. Якорь машины состоял из восьми катушек, посаженных на незамкнутые сердечники, набранные из отдельных листов стали. Катушки были равномерно размещены по окружности таким образом, чтобы торцы сердечников расположились между концами крестовин (рис. 3). При вращении ротора крестовины поочередно соединяли сердечники катушек с магнитной цепью ротора

(рис. 4), благодаря чему поток в сердечниках катушек оказывался пульсирующим и в катушках индуктировалась э. д. с.

Ввиду пульсирующего (а не знакопеременного) характера изменения потока в сердечниках катушек якоря, машина А. Клименко представляет индукторный тип. Однако, с другой

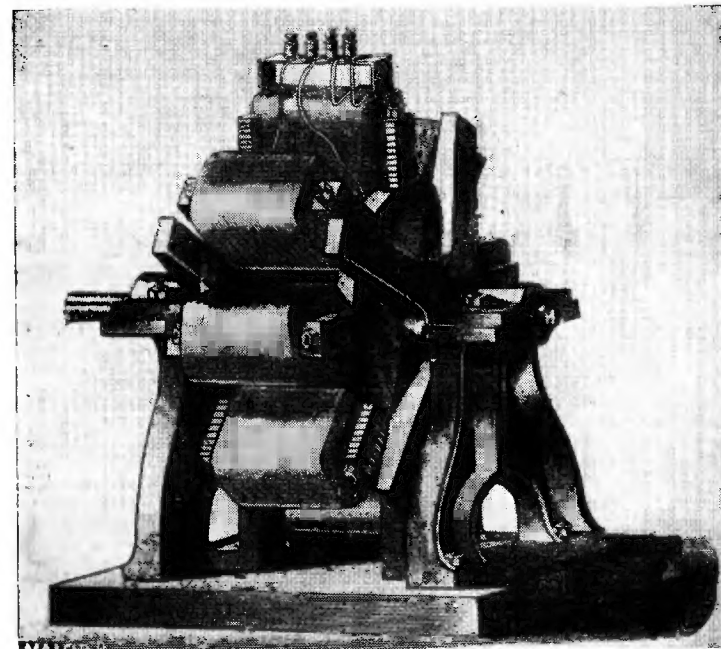


Рис. 3. Синхронная машина А. Клименко (1882 г., фирма «Компани Электрик»).

стороны, эта машина имеет явно выраженные разноименные полюса (на одной крестовине южные, а на другой — северные), что приближает эту конструкцию к современной машине с когтеобразными полюсами (см. рис. 1).

Машина, изображенная на рис. 3, демонстрировалась в 1883 г. на электротехнической выставке в Вене [1] и, по свидетельству М. О. Доливо-Добровольского [4], вызвала там вполне понятный интерес. Эта сравнительно небольшая машина имела скорость вращения 1000 об/мин и питала 8—10 лампочек Яблочкова, что было эквивалентно мощности около 1 л. с. [1]. Однако серьезным недостатком машины Клименко был весьма низкий к. п. д., что являлось следствием, главным образом, пульсирующего характера потока в крестовине и

центральной втулке. Поэтому машина А. Клименко оказалась непригодной для практического применения и в дальнейшем подобные машины больше не строились.

Более приемлемых для практических целей конструктивных форм удалось достичь в машине (рис. 5), разработанной в конце 80-х годов английской фирмой «Морди» (Mordey) [4, 6]. Как видно из рис. 6, где представлены отдельные детали

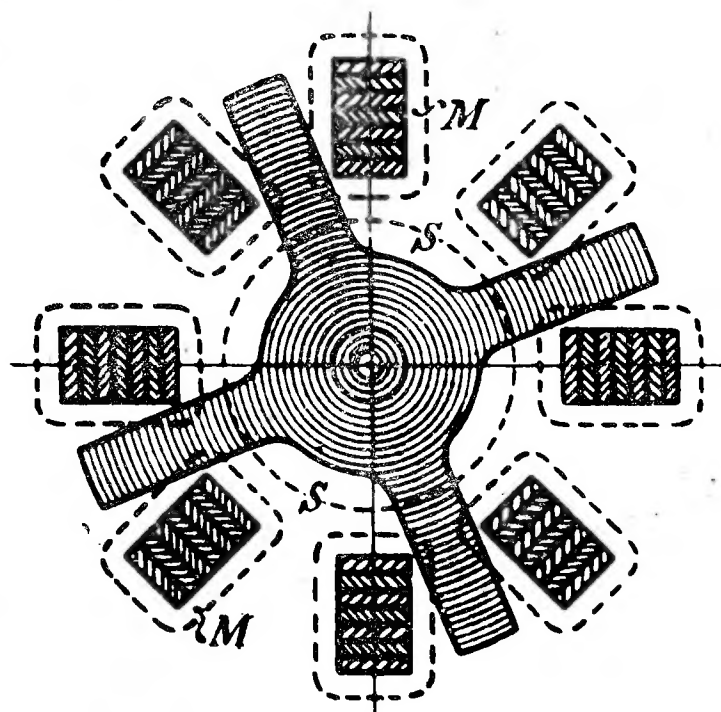


Рис. 4. Принцип действия машины А. Клименко:
M — катушки статора; S — катушка возбуждения.

этой машины, конструкция фирмы «Морди» базируется почти полностью на идеях А. Клименко [4]. Однако, в отличие от конструкции А. Клименко, в машине «Морди» катушки якоря не имеют стальных сердечников, и поэтому поток возбуждения совершенно не пульсирует. Кроме того, катушкам якоря и их сердечникам придана специальная конфигурация, которая позволила более рационально разместить их по окружности машины. Все это значительно улучшило качества машины А. Клименко и дало возможность машине фирмы «Морди» найти практическое применение [3]. Мощность машины

«Морди» достигала 37,5 кВт, причем для питания катушки возбуждения требовалось всего 500 вт, т. е. 1,3%. Вместе с тем серьезным недостатком машины фирмы «Морди» продолжал оставаться пульсирующий характер потока в катушках якоря, а также значительная сложность конструкции.

Машины А. Клименко и фирмы «Морди» еще не имели когтеобразную конструкцию полюсов в полном смысле этого слова, однако они несли в себе явно выраженный зародыш этой конструкции и представляли первый этап ее развития.

Второй, решающий, шаг в области развития конструкции

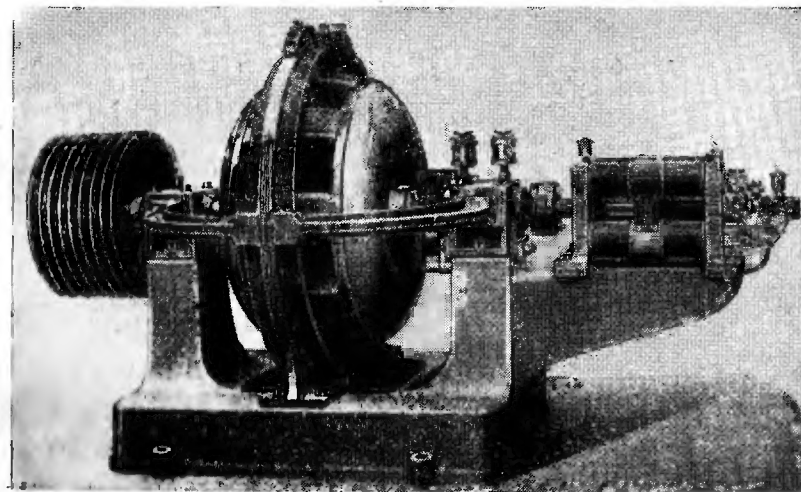


Рис. 5. Синхронная машина фирмы «Морди».

синхронной машины с когтеобразными полюсами был сделан на рубеже 80-х и 90-х годов XIX века. В 1889 г. английские инженеры Д. Джиббс и Э. Фэсквит взяли патент на «усовершенствования в динамомашинках переменного тока» [2], в котором основным предметом изобретения явилась «полюсная система, состоящая из центрального сердечника из мягкой стали с единственной катушкой возбуждения, намотанной вокруг него, и с выступающими полюсами переменной полярности, расположенными параллельно валу и имеющими длину, равную или почти равную ширине якоря». В этой формулировке и в приведенных в патенте чертежах основная идея когтеобразной конструкции выражена вполне точно, поэтому патент Д. Джиббса и Э. Фэсквита можно, по-видимому, считать исторически первым документом, трактующим о когтеобразных полюсах в современном их понимании.

Дальнейшее развитие конструкции синхронной машины с когтеобразными полюсами и ее практическое осуществление было достигнуто известным швейцарским инженером Чарльзом Броуном (будущим основателем фирмы «Броун—Бовери» (Brown—Boveri)). Конструкция Броуна была практически ис-

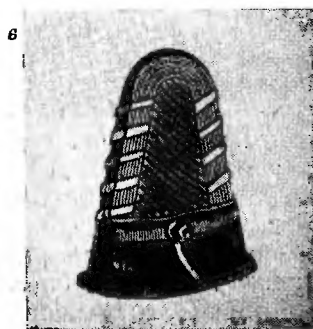
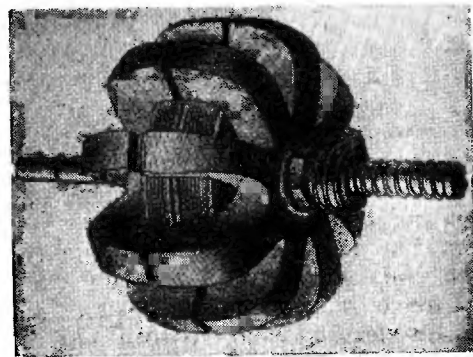
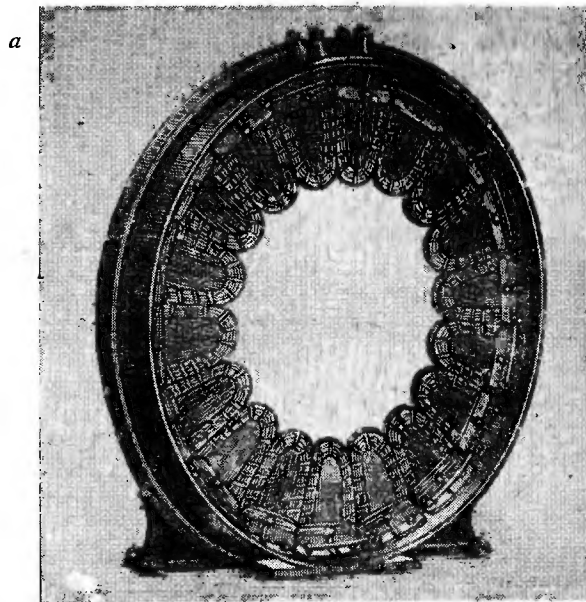


Рис. 6. Детали машины «Морди»:
а — статор, б — ротор, в — катушка статора.

пользована в 1890—1891 гг. швейцарской фирмой «Эрликон» (Örlikon) при изготовлении синхронного генератора для знаменитой первой в истории трехфазной высоковольтной линии передачи длиной 170 км из Лауффена во Франкфурт-на-Майне [3]. Спроектированный Броуном трехфазный генератор

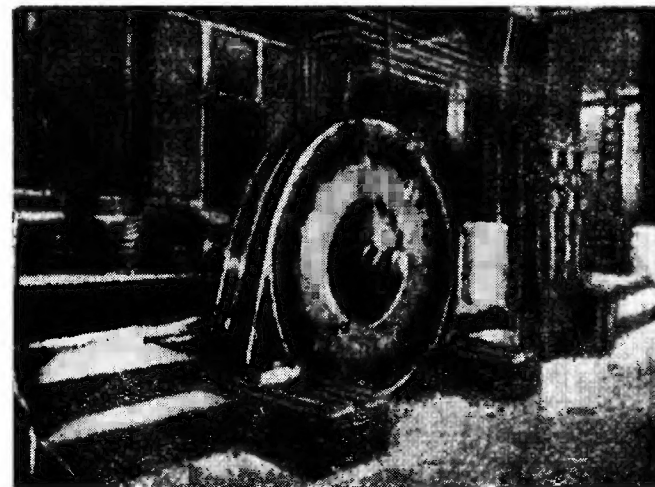


Рис. 7. Синхронный генератор конструкции Ч. Броуна для Лауффенской гидроэлектростанции (1891 г., фирма «Эрликон»).

(рис. 7, 8) имел мощность около 230 кВА при линейном напряжении 95 В и частоте 40 Гц и был рассчитан на вращение от гидротурбины со скоростью 150 об/мин. Внешний диаметр статора был равен 1894 мм, внутренний — 1764 мм, длина пакета — 380 мм. Статор имел 96 круглых пазов диаметром 33 мм, расположенных с шагом 60 мм. В пазы была уложена трехфазная обмотка, состоявшая из медных стержней диаметром 29 мм, изолированных асбестовыми трубками.

Данные обмотки: $2p = 32$, $m = 3$, $Z = 96$, $q = 1$, $y = 1-4$, $\beta = 1$, $\omega_{\phi} = 16$, соединение фаз — звезда. Ротор машины (рис. 8, 9) состоял из центрального диска со ступицей и двух боковых колец с 16 выступами — полюсами когтеобразной формы на каждом. На ступице ротора в обмоточном пространстве размерами 90×180 мм была уложена катушка возбуждения с 496 витками медного провода диаметром 5 мм. Воздушный зазор машины был равен 6 мм. К. п. д. генератора при номинальной нагрузке получился равным 95,4% [3].

Конструктивные особенности генератора Броуна привлекли

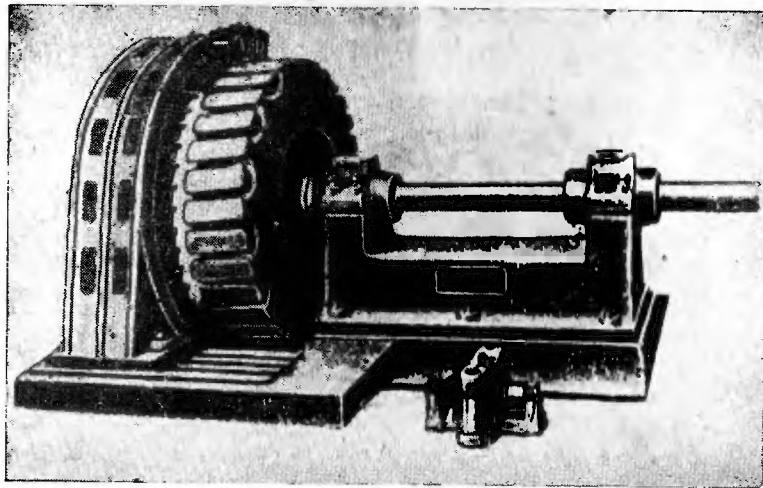


Рис. 8. Генератор Ч. Броуна при выдвинутом роторе.

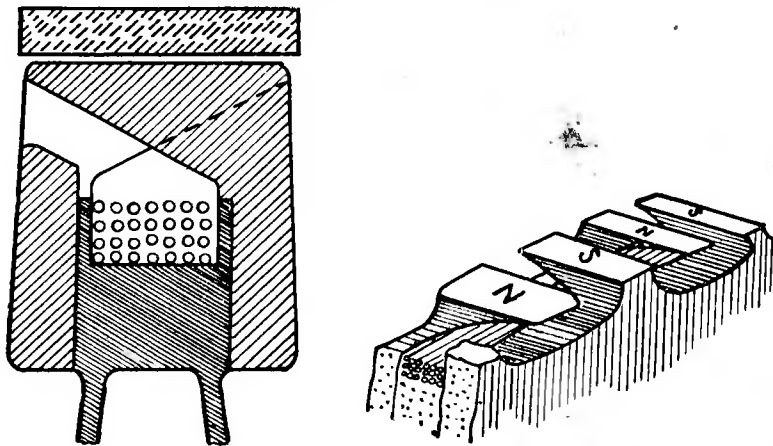


Рис. 9. Детали индуктора генератора Ч. Броуна.

внимание М. О. Доливо-Добровольского, который в общем положительно оценил эту своеобразную машину. Однако ротор генератора был, по мнению Доливо-Добровольского, наиболее неудачной его частью [8]. В частности, Доливо-Добровольский отметил в качестве существенного недостатка большое рассеяние потока между когтеобразными полюсами, вызывающее значительные колебания напряжения при изменении нагрузки.

Несмотря, однако, на полную справедливость этого замечания Доливо-Добровольского, генератор Броуна в целом вполне успешно работал на линии Лауффен—Франкфурт и в период Франкфуртской международной электротехнической выставки (16 мая — 19 октября 1891 г.) был предметом постоянного

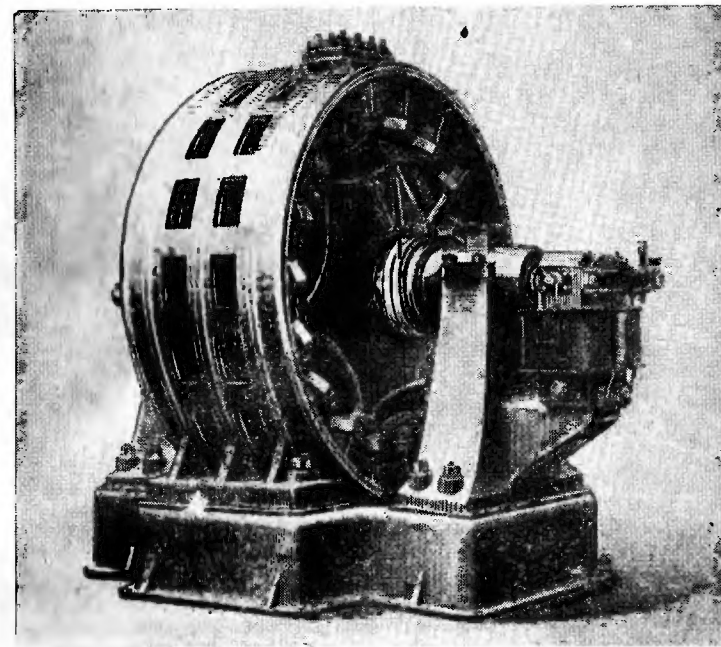


Рис. 10. Синхронный генератор с когтеобразными полюсами фирмы «Эрликон».

внимания не только посетителей выставки, но и большого числа известных электротехников того времени (М. Депре, Г. Феррарис, С. Томпсон, Г. Капп).

Успех гидрогенератора Броуна привел к быстрому и широкому распространению когтеобразной конструкции, и в течение 90-х годов XIX века она привлекала внимание целого ряда фирм.

Та же фирма «Эрликон» после лауффенского генератора стала выпускать [6] подобные машины в несколько ином конструктивном исполнении (рис. 10, 11). Особенностью этой конструкции было применение на статоре полукруглых пазов (рис. 11б), и так как это вызвало заметные пульсации потока, то массивные когтеобразные полюса пришлось снабдить по-

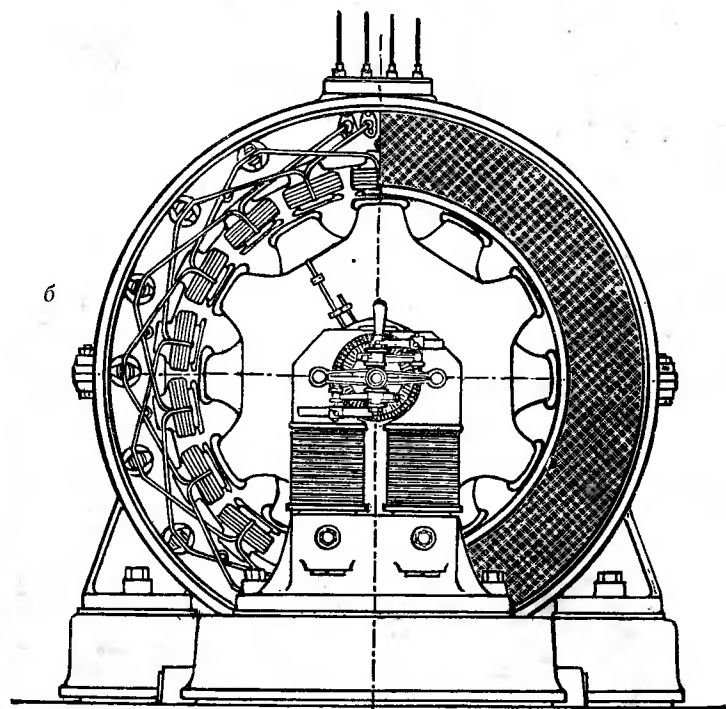
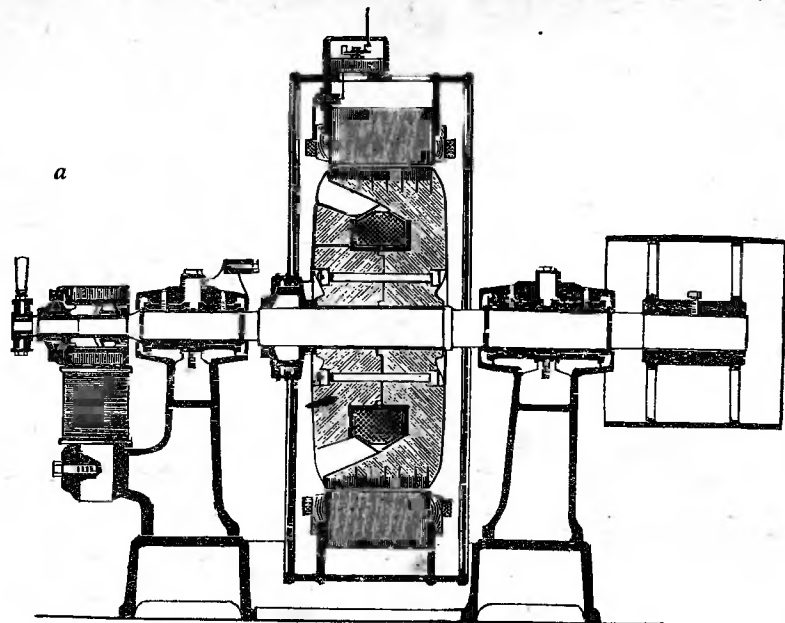


Рис. 11. Чертеж генератора фирмы «Эрликон»:
а — продольный разрез; б — вид с торца.

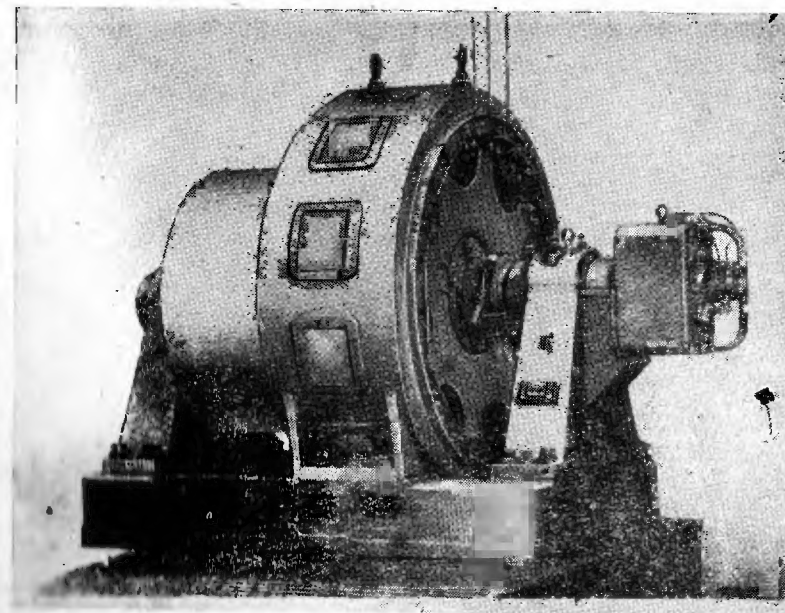


Рис. 12. Синхронный генератор с когтеобразными полюсами фирмы «Шуккерт».

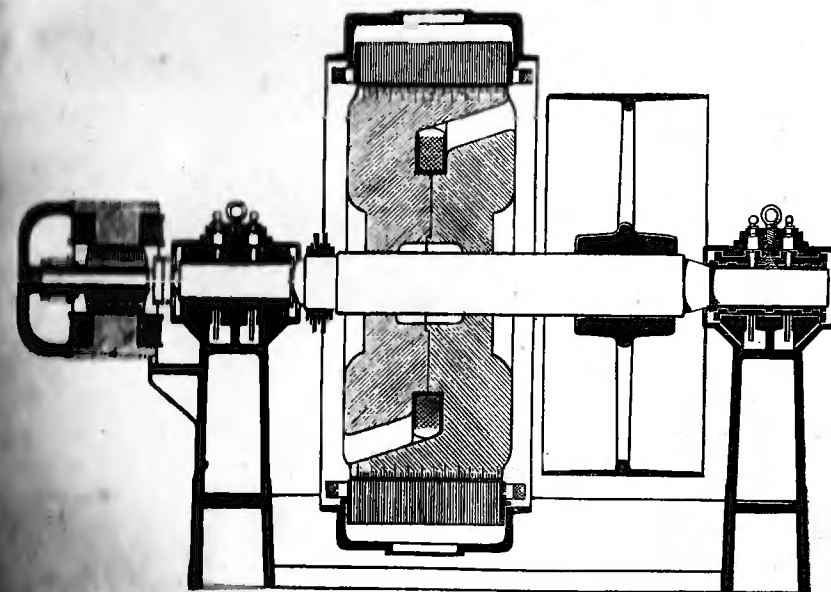


Рис. 13. Поперечный разрез генератора фирмы «Шуккерт».

люсными наконечниками, набранными из тонких стальных листов (рис. 11). Аналогичные машины выпускались также фирмой «Шуккерт» (Schuckert) (рис. 12, 13) и акционерным обществом «Берлинер Maschinenbau» (Berliner Maschinenbau Aktiengesellschaft) (рис. 14). Машины обоих типов имели

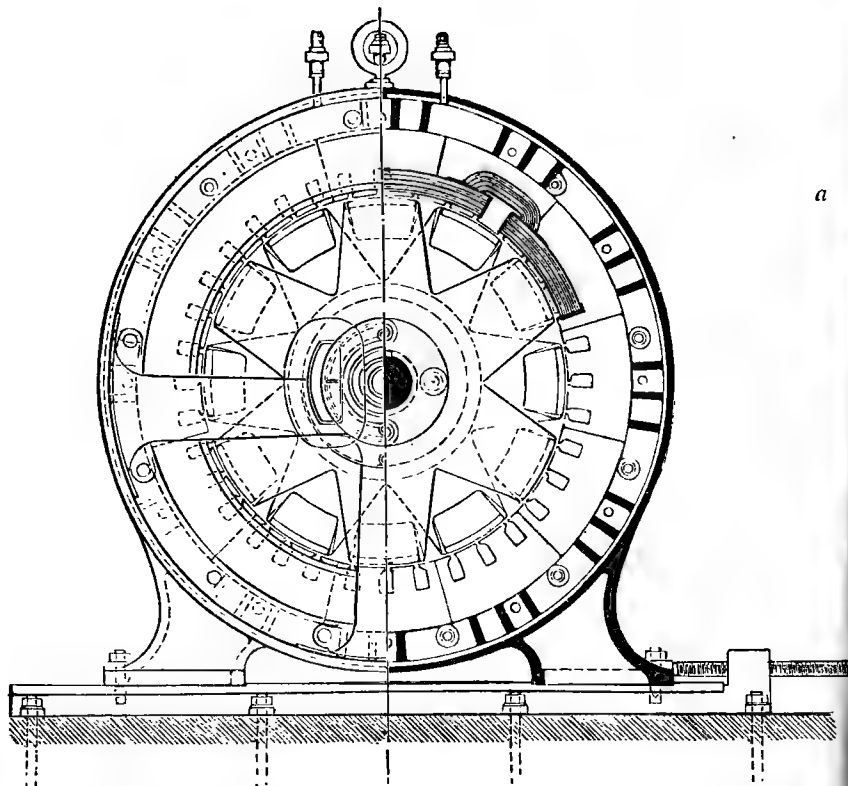
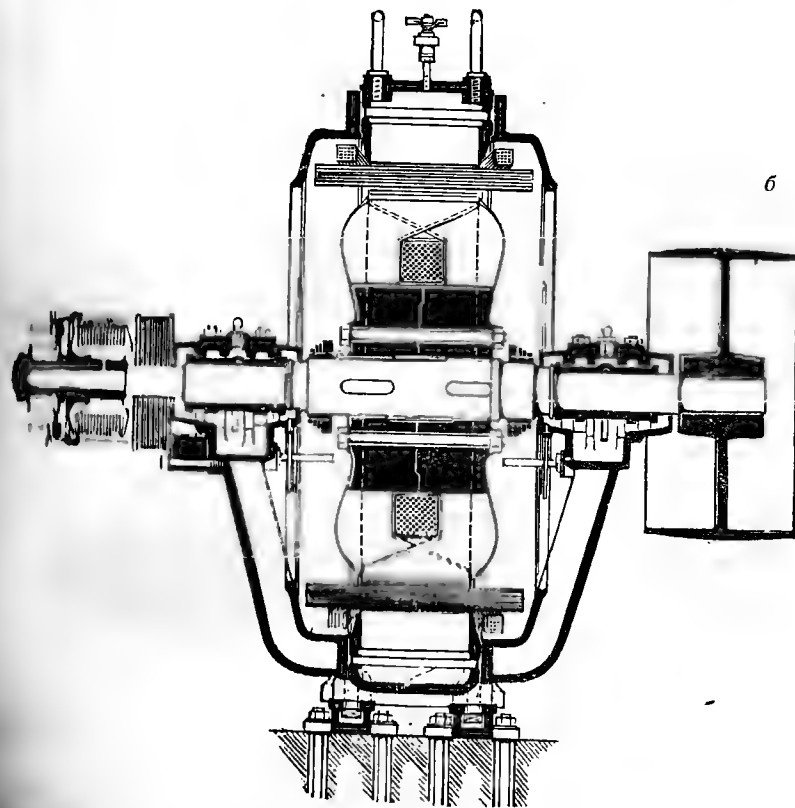


Рис. 14. Синхронный генератор с когтеобразными
а — продольный

довольно значительную мощность. Так, мощность машины, изображенной на рис. 14, равнялась 120 ква. Ее якорь имел 36 пазов, число полюсов равнялось 12. Обмотка якоря была трехфазной, число пазов на полюс и фазу равнялось 1. Фазное напряжение машины составляло 2000 в, фазный ток — 20 а [6].

Оригинальная конструкция синхронной машины была разработана швейцарской фирмой «Алиот» (Alioth). Эта машина (рис. 15) отличалась тем, что катушка возбуждения ее была

неподвижной, в связи с чем повышалась механическая прочность ротора и отпадала необходимость в щеточно-контактном устройстве для подвода тока к вращающейся обмотке. Центральный цилиндр индуктора *С* в этой машине неподвижно укрепился со стороны одного из своих торцов (на рис. 15 —



фирмы «Берлинер Maschinenbau»:
б — продольный

неподвижной, в связи с чем повышалась механическая прочность ротора и отпадала необходимость в щеточно-контактном устройстве для подвода тока к вращающейся обмотке. Центральный цилиндр индуктора *С* в этой машине неподвижно укрепился со стороны одного из своих торцов (на рис. 15 —

трального цилиндра *C* небольшими воздушными зазорами в 1 мм. Правая (на рис. 15) полюсная система была закреплена на втулке, которая, в свою очередь, была неподвижно посажена на вал ротора, проходящий внутри цилиндра *C* и втулки *D* и выходящий с обеих сторон машины.

Для передачи вращения левой полюсной системе последняя прикреплялась к правой системе с помощью бронзовых перемычек (зачерненные полоски на рис. 15). Машина фирмы

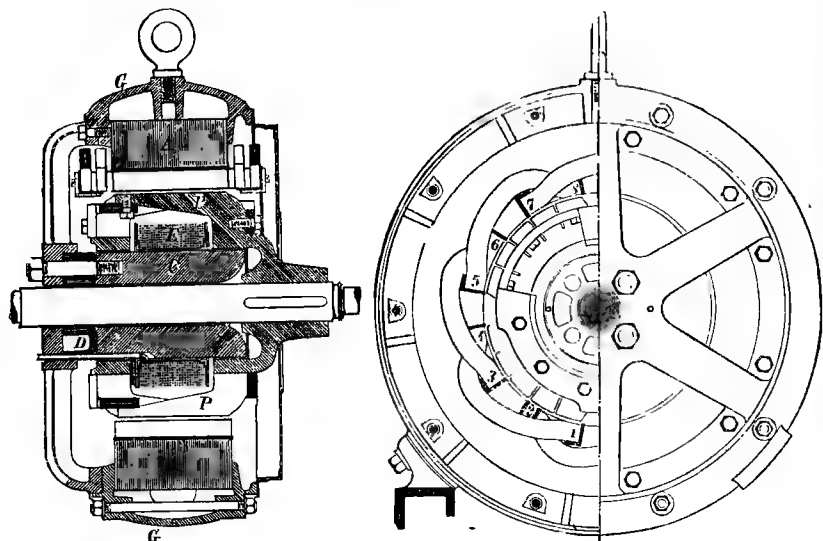


Рис. 15. Бесконтактная синхронная машина с когтеобразными полюсами фирмы «Алиот»:

A — статор; *P* — когтеобразные полюса; *C* — центральный цилиндр; *D* — немагнитная втулка; *G* — станина машины

«Алиот» была двухфазной, четырехполюсной; число якорных секций обмотки статора равнялось 8, число пазов статора — 16. Фазное напряжение составляло 2000 в [6], мощность ее была равна 20 л. с. [5]. Эта машина экспонировалась на электротехнической выставке в г. Карлсруэ в 1895 г. Интересно отметить, что почти все показанные на этой выставке генераторы переменного тока имели когтеобразные полюса [5], поэтому выставку 1895 г. в Карлсруэ можно считать своего рода триумфом конструкции синхронной машины с когтеобразными полюсами.

Еще одна оригинальная конструкция синхронной машины с когтеобразными полюсами была запатентована в 1897 г. фирмой «Унион Электрицитетс Гезельшафт» (Union Elektrizitäts-

Gesellschaft) в Берлине [7]. Как и машина «Алиот», она не имела вращающихся обмоток и не нуждалась в щеточно-контактных устройствах.

В этой машине (рис. 16) когтеобразные полюса *d* (в патентном описании они были названы «полюсными рогами») располагались на двух «индукторных колесах» *a*, посаженных на общий вал и магнитно-экранированных от него втулкой *e* из цветного металла. Индукторные колеса имели с боков цилиндрические прилипы, которые охватывали статор машины и приближались к его станине, будучи отделенными от нее лишь небольшими зазорами. Обмотка возбуждения была выполнена в виде двух круглых катушек *b*, которые располагались на статоре между пакетом железа и цилиндрическим приливом индукторного колеса. Направление тока в катушках возбуждения выбиралось так, чтобы полюса разных индукторных колес имели разную полярность. При этом в зазоре машины получалось переменное чередование полюсов северной и южной полярности, а замыкание потока происходило

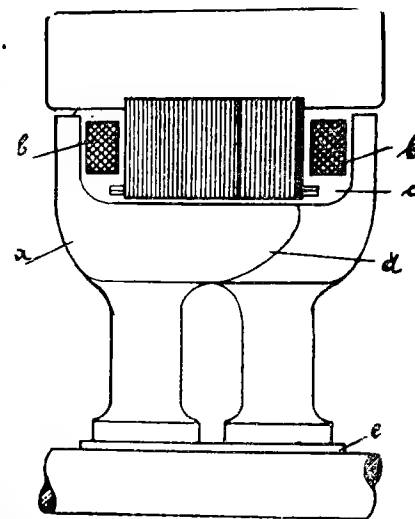


Рис. 16. Схематический чертеж бесконтактной машины с когтеобразными полюсами фирмы «Унион» (патент 1897 г.):

a — индукторное колесо; *b* — катушки возбуждения; *c* — якорь (статор) машины; *d* — когтеобразные полюса; *e* — немагнитная втулка.

через внешнюю магнитную цепь, образуемую цилиндрическими прилипами индукторных колес, станией машины и якорями между ними.

Машина фирмы «Унион» имела ряд преимуществ по сравнению с другими известными бесконтактными конструкциями синхронных машин, в частности по сравнению с машиной «Алиот» и распространенными в то время индукторными машинами. Эти преимущества заключались в простоте конструкции, меньшем весе, меньшем расходе меди [7]. Однако такие машины не получили в то время никакого распространения. Объяснялось это, по-видимому, тем, что к концу XIX века значение машин с когтеобразными полюсами вообще стало быстро падать, и к 1900 г. практически был полностью утрачен

интерес к таким машинам. Причиной такого резкого поворота хода событий, когда в течение трех-пяти лет «триумф» когтеобразных полюсов успел смениться почти полным их забвением, послужило главным образом то обстоятельство, что конструкции с когтеобразными полюсами конца XIX века, предназначавшиеся в качестве генераторов для более или менее крупных электростанций, не смогли конкурировать с быстро развивавшимися в то время явнополюсными и полнополюсными конструкциями синхронных машин. Последние, несмотря на большую сложность и более высокую стоимость, оказались более пригодными для крупных стационарных машин, так как обеспечивали большую механическую прочность и надежность в эксплуатации и могли быть спроектированы на любые необходимые параметры. Поэтому конструкция с когтеобразными полюсами, подчиняясь требованиям эпохи бурного роста производства электроэнергии, быстро уступила место более подходящим для крупных масштабов явнополюсным и полнополюсным конструкциям машин и почти полностью вышла из употребления, перейдя в разряд устаревших [9].

Период полного застоя в развитии конструкции с когтеобразными полюсами продолжался почти четыре десятилетия, и лишь в конце 30-х гг. нынешнего века почти одновременно появилось несколько новых областей применения, в которых этой конструкции суждено было сыграть значительную роль.

2. БЕСКОНТАКТНЫЕ СЕЛЬСИНЫ НА БАЗЕ КОНСТРУКЦИИ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

В 30-х гг. XX века начался период интенсивного развития методов и средств электромашиной автоматики. Большой прогресс был достигнут, в частности, в области синхронной передачи движения («электрического вала», синхронной связи), а также в области построения специальных электрических машин для синхронной связи — сельсинов. Однако по мере развития этого вида автоматики начали повышаться требования к точности передачи угла поворота электрического вала, к получению минимальной погрешности так называемого угла рассогласования. Изучение этого вопроса показало, что одним из серьезных источников погрешности работы сельсинов являются щеточно-контактные устройства, служащие для передачи тока роторной обмотке сельсина. Поэтому устранение щеточных контактов могло бы явиться шагом вперед в повышении точности работы синхронной передачи.

Большая работа по изысканию путей создания сельсина без щеточных контактов была проведена во Всесоюзном элек-

тротехническом институте им. В. И. Ленина (ВЭИ), где в 1938 г. А. Г. Иосифьяном и Д. В. Свечарником была предложена оригинальная конструкция бесконтактного сельсина, базирующаяся на применении когтеобразных полюсов (рис. 17) [11, 12]. В этом сельсине была использована идея внешнего магнитопровода аналогично тому, как это было сделано в бесконтактной машине фирмы «Унион». Однако поскольку обе обмотки сельсина питаются переменным током, то магнитный поток как в статоре, так и в роторе сельсина переменный. Поэтому магнитная система всей машины должна была быть

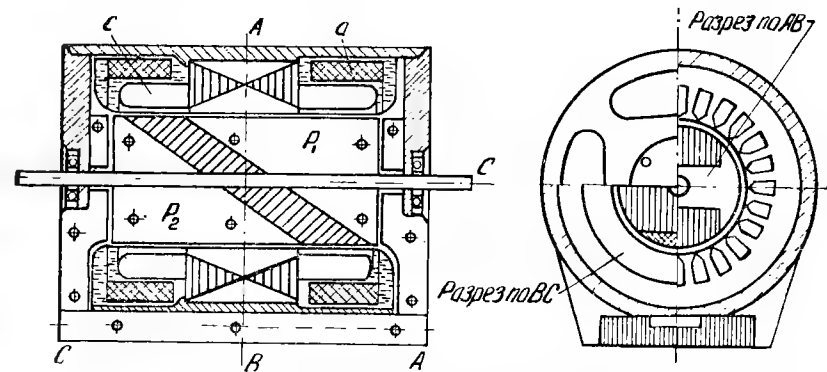


Рис. 17. Схематический чертеж бесконтактного сельсина ВЭИ:
 P_1 и P_2 — полюса; a — обмотка возбуждения; c — обмотка синхронизации.

выполнена в виде пакетов, составленных из отдельных стальных листов. В связи с этой особенностью в бесконтактном сельсине внешней магнитной цепи была придана форма плоской скобы, а ротор выполнен в виде двух пакетов-полюсов, посаженных на вал из немагнитной стали. Второй отличительной чертой конструкции бесконтактного сельсина по сравнению с машиной «Унион» было иное расположение зазоров между ротором и внешней цепью. Вместо цилиндрических зазоров, расположенных под внутренней поверхностью станины, в бесконтактных сельсинах были применены торцовые воздушные зазоры, образуемые между круговой внутренней поверхностью скобы и торцовой поверхностью пакета-полюса ротора (рис. 17). Такое расположение зазоров уменьшало вес сельсина и упрощало его изготовление, но требовало известного труда на регулировку зазоров при сборке. Поэтому в дальнейшем, при переходе к массовому производству, было признано целесообразным изготавливать бесконтактные сельсины с цилиндрическими зазорами (рис. 18).

Бесконтактные сельсины явились, по существу, новой конструктивной формой машины с когтеобразными полюсами. Их изобретение и последующее быстрое внедрение в массовое производство представляло значительное достижение как в области синхронной передачи, так и в области дальнейшего развития когтеобразной конструкции.

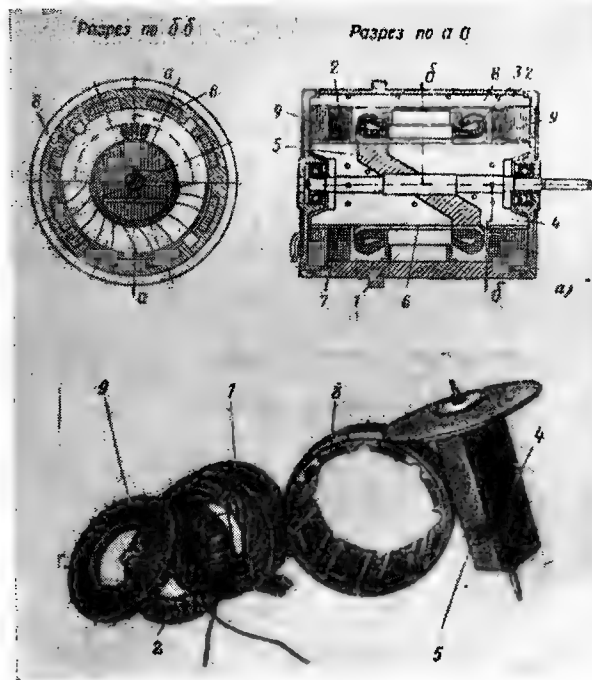


Рис. 18. Бесконтактный сельсин типа БС:

1 — статор; 2 — обмотки возбуждения; 3 — обмотки синхронизации; 4 — полюсные пакеты; 5 — междуполюсная заливка; 6 — главный воздушный зазор; 7 — дополнительные воздушные зазоры; 8 — внешние магнитопроводы; 9 — тороидальные пакеты.

3. КОГТЕОБРАЗНЫЕ ПОЛЮСА В МАШИНАХ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ

Тридцатые годы XX века ознаменовались быстрым развитием техники производства качественных магнитотвердых сплавов. С промышленным освоением сплавов типа альнико появилась возможность применения их в постоянных магнитах для возбуждения синхронных машин небольших мощностей. Большая работа по исследованию таких машин была развер-

нута в ВЭИ им. Ленина. Сотрудники этого института А. С. Кантер, А. Н. Ларионов, Т. Г. Сорокер, С. В. Крауз достигли значительных результатов в усовершенствовании машин с постоянными магнитами.

Первоначально постоянные магниты в таких машинах выполнялись в виде полюсной звездочки, насаженной непосредственно на вал генератора. Однако такая конструкция ограничивала окружную скорость ротора, которая в этом случае не превышала 30 м/сек и не позволяла получить индукцию в воздушном зазоре выше 2—4 тыс. гс. Кроме того, длина магнита в направлении намагничивания в роторе с магнитами в виде звездочки получалась небольшой, в связи с чем энергия магнита оказывалась недостаточной для противодействия реакции якоря, и линейную нагрузку якоря (статора) приходилось выбирать низкой. Наконец, ввиду отсутствия полюсных пакочечников поперечный поток реакции якоря проходил по массе магнита, что вызывало сильную остаточную деформацию поля магнита после перегрузок. Все это значительно ограничивало возможности машин с постоянными магнитами и не позволяло увеличить их мощность сверх 100—200 вт. Это положение удалось изменить путем применения когтеобразных полюсов [13].

В этом случае постоянные магниты имеют простую форму колец В, помещаемых в ротор с когтеобразными полюсами туда, где обычно находится катушка возбуждения (рис. 19). Магниты намагничиваются аксиально и создают поток такого же характера, как и обычная катушка возбуждения в роторе с когтеобразными полюсами. Отличие заключается только в том, что кольцо-магнит одновременно исполняет роль втулки ротора и последняя оказывается, таким образом, не только ненужной, но и вредной, так как замыкает на себя часть потока магнита. Поэтому вал ротора такой конструкции должен быть выполнен из немагнитной стали или же если это почему-либо невыполнимо, магнитные кольца должны быть отделены от вала промежуточной немагнитной втулкой Д из супердюрала или силумина (рис. 19). Благодаря удаленности магнитов от воздушного зазора и статора в этой конструкции обеспечивается равномерное распределение потока по сечению магнитов и улучшается их использование. Значительно меньше сказывается также размагничивающее действие реакции якоря, в особенности при мгновенных коротких замыканиях. Механическая прочность ротора при когтеобразной конструкции полюсов заметно повышается, благодаря чему оказывается возможной работа машины при окружных скоростях до 100 м/сек. Наконец, при применении ротора с когтеобразными полюсами имеется возможность использовать магниты большой длины в

направлении намагничивания, а также применить параллельное включение магнитов, например в виде сдвоенного ротора (рис. 19). Это позволяет уменьшить радиальные размеры колец-магнитов и снизить таким образом действие центробежной силы.

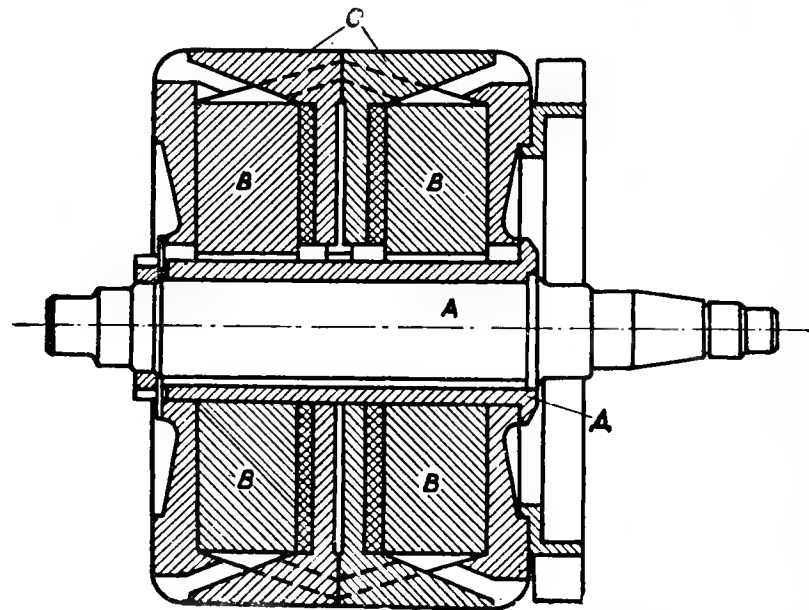


Рис. 19. Конструкция ротора машины с постоянными магнитами и когтеобразными полюсами (по А. П. Ларионову):
А — вал; В — кольцевые постоянные магниты; С — когтеобразные полюса; D — немагнитная втулка.

Конструкция ротора с постоянными магнитами и когтеобразными полюсами представила несомненный интерес для практики и позволила поставить вопрос о создании полноценных, выдерживающих перегрузки и мгновенные короткие замыкания генераторов с постоянными магнитами мощностью до 100 ква [13]. Однако практического воплощения эти идеи пока не получили, и машины с постоянными магнитами и когтеобразными полюсами строятся пока только на малые мощности. Так, на рис. 20 представлена одна из конструкций ротора с дисковыми постоянными магнитами и когтеобразными полюсами, разработанная на заводе АТЭ-1 (г. Москва).

В последние годы в литературе стали появляться описания и других конструктивных вариантов машин с постоянными магнитами и когтеобразными полюсами. В 1956 г. фирмой

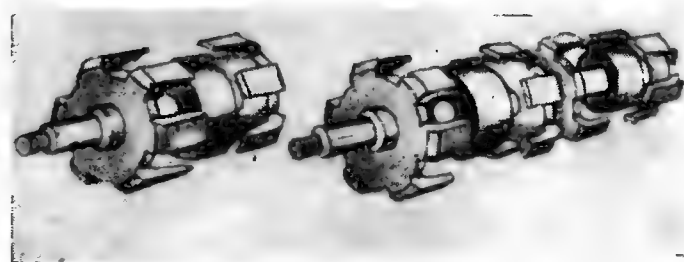


Рис. 20. Ротор с дисковыми постоянными магнитами и когтеобразными полюсами.

«АЭГ» (Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft) (ФРГ) была разработана конструкция синхронной машины с внешней магнитной цепью (подобно машине «Унион»), в которой вместо катушек возбуждения имеются два кольцевых постоянных магнита, расположенных вблизи дополнительных воздушных

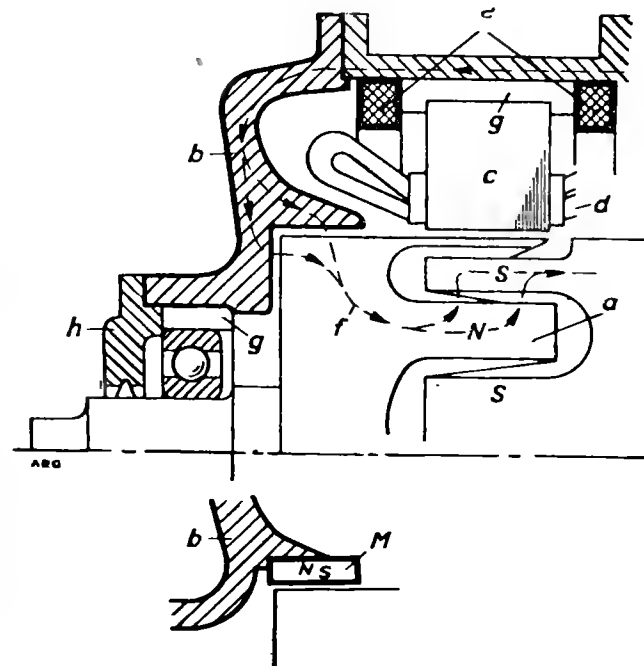


Рис. 21. Синхронная машина с внешней магнитной цепью с постоянными магнитами (фирма «АЭГ»):

а — когтеобразные полюса; б — подшипниковые щиты; с — статор; d — обмотка статора; e — катушки возбуждения; f — путь основного потока; g — немагнитные прокладки; h — крышка подшипника; M — постоянный магнит.

зазоров между ротором и внешней магнитной цепью [38] (рис. 21). Помимо постоянных магнитов, имеется еще и электромагнитное возбуждение от неподвижных катушек.

На рис. 22 представлен один из опытных образцов подобной машины мощностью в 1 квт и скоростью 3750 об/мин. Постоянные магниты в этой машине выполнены в виде двух пятилучевых звездочек, вставляемых с обоих торцов станины. Во внутренние отверстия звездочек проходит ротор с когтеобразными полюсами. Круглые катушки служат для намагничивания магнитов в собранной машине.

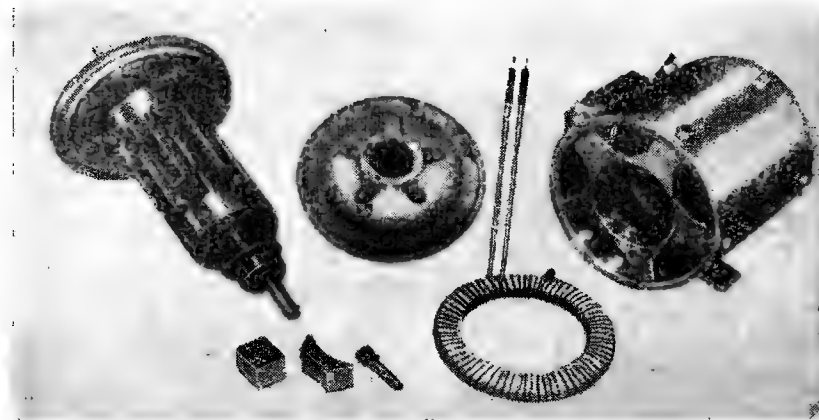


Рис. 22. Опытный образец генератора с постоянными магнитами и внешней магнитной цепью (фирма «АЭГ»).

Другая конструкция генератора со смешанным постоянным и электромагнитным возбуждением была предложена недавно Л. М. Паластиным и А. И. Чесноковым [46]. Этот генератор (рис. 23) представляет собой обыкновенную конструктивную форму машины с когтеобразными полюсами (по типу машины, изображенной на рис. 1), в которой роль центральной втулки играет мощный цилиндрический магнит, намагниченный в осевом направлении, а вокруг магнита расположена так называемая компенсационная обмотка, служащая для регулирования потока возбуждения машины при ее нагрузке. Наличие этой обмотки заставляет, помимо магнита, монтировать в роторе также небольшую втулку из мягкой стали. В этой втулке, как видно из рис. 23, поток рассеяния постоянного магнита и поток компенсационной обмотки оказываются направленными встречно. Поэтому по мере повышения м. д. с. компенсационной обмотки не только увеличивается поток,

созданный этой м. д. с., но возрастает также и полезный поток постоянного магнита за счет снижения его потока рассеяния через магнитную втулку.

Согласно данным Л. М. Паластина и А. И. Чеснокова, положительное влияние магнитной втулки на поток компенсационной обмотки в смысле улучшения магнитной проводимости ротора сильнее, чем отрицательное влияние ее на поток постоянного магнита при холостом ходе. Поэтому при

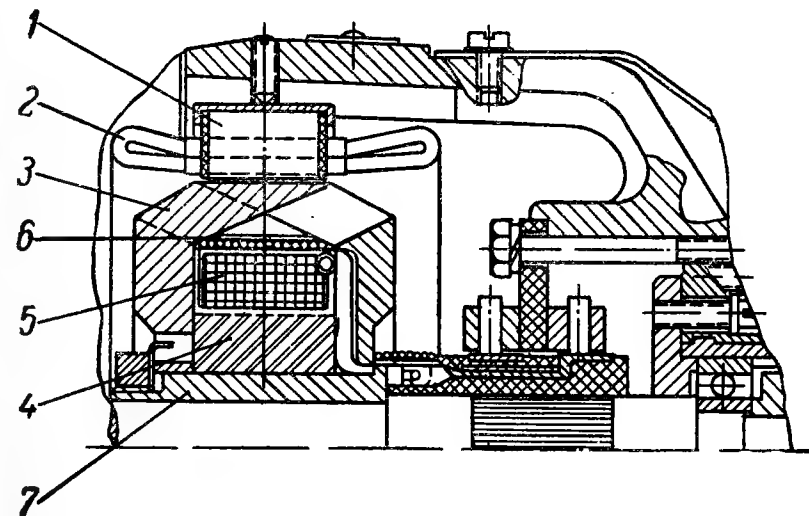


Рис. 23. Регулируемый синхронный генератор со смешанным постоянным и электромагнитным возбуждением (по Л. М. Паластину и А. И. Чеснокову):

1 — пакет статора; 2 — обмотка статора; 3 — когтеобразные полюсы; 4 — кольцеобразный постоянный магнит; 5 — компаундирующая обмотка; 6 — бандаж; 7 — магнитная втулка.

наличии магнитной втулки определенных размеров расход мощности на возбуждение у данного генератора оказывается меньшим, чем у обычного генератора с чисто электромагнитным возбуждением.

4. КОГТЕОБРАЗНЫЙ ИНДУКТОР В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МУФТАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

В период второй мировой войны в зарубежной технике (главным образом в Швеции и США) получил быстрое развитие сравнительно новый вид электромашинного оборудования — электромагнитные муфты скольжения. Первоначально применение таких муфт было связано главным образом с

дизельными установками (на морских судах, экскаваторах), где была необходима эластичная связь между двигателем и машиной-орудием. В дальнейшем муфты скольжения начали применяться также в регулируемых приводах в деревообрабатывающей, металлообрабатывающей, нефтедобывающей промышленности и т. п. [18, 20, 22, 23, 41, 47].

Применение нашли три конструкции индуктора электромагнитной муфты скольжения: явнополюсная, индукторная и котгеобразная.

Уже в относительно ранних публикациях [20, 23] имелись вполне определенные высказывания о преимуществах котгеобразного индуктора как перед явнополюсным, так и перед ин-

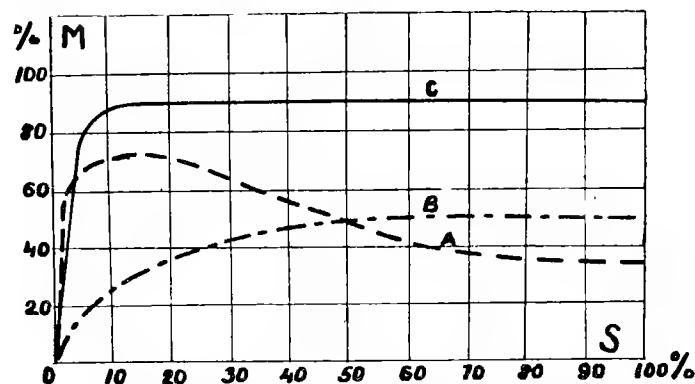


Рис. 24. Механические характеристики электромагнитных муфт скольжения при разных типах индукторов [20]:
 А — индуктор с явновыраженными полюсами; В — одноименнополюсный индуктор (по типу индукторного генератора); С — индуктор с котгеобразными полюсами.

дукторным. Так, в статье главного инженера фирмы «Дайнаматик Корпорейшн» (Dynamatic Corporation) Дж. Уинтера приведено конкретное сравнение указанных трех типов муфт по развиваемому ими моменту [20]. Из приведенных в статье графиков (рис. 24) видно, что преимуществом явнополюсного индуктора является малое скольжение при скоростях, близких к синхронной. Серьезный недостаток этого индуктора заключается в наличии падающей части кривой момента при значительных скольжениях, где устойчивая работа муфты невозможна. Этого недостатка лишена муфта индукторного типа, у которой кривая момента с ростом скольжения непрерывно поднимается, стремясь к некоторому пределу. Но, с другой стороны, индукторная муфта, как видно из рис. 24, не может передавать значительных моментов при малых скольжениях.

Муфты с котгеобразным индуктором не имеют недостатков явнополюсной и индукторной конструкции и в то же время сохраняют их преимущества. Кривая момента этих муфт резко поднимается вверх и затем быстро принимает почти горизонтальное положение (рис. 24). Такой характер кривой момента весьма благоприятен для регулирования скорости путем изменения тока возбуждения муфты и для осуществления гибкой связи между двигателем и рабочим механизмом. Поэтому применение котгеобразного индуктора в электромагнитных муфтах скольжения в последнее время непрерывно расширяется.

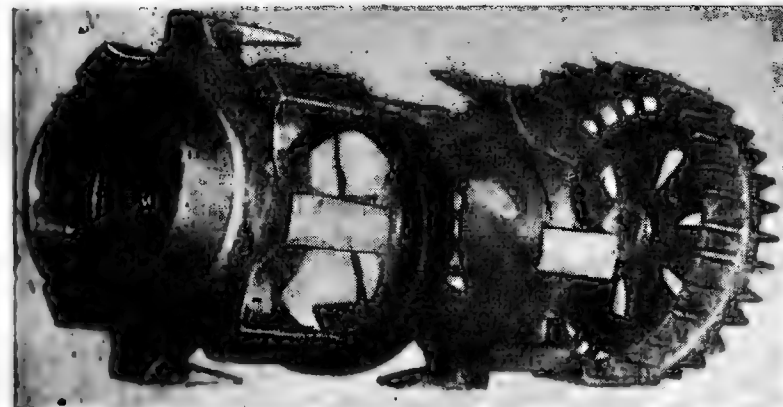


Рис. 25. Электромагнитная муфта скольжения с котгеобразными полюсами (фирма «Дайнаматик Корпорейшн»).

В качестве примера на рис. 25 показана конструкция электромагнитной муфты с котгеобразными полюсами, изготовленная фирмой «Дайнаматик Корпорейшн».

В более крупных муфтах этой фирмы применяется двоякая магнитная система с котгеобразными полюсами (рис. 26) — по типу предложенного А. Н. Ларионовым генератора с постоянными магнитами (см. рис. 19).

В СССР большие работы по применению электромагнитных муфт скольжения в экскаваторных приводах проводятся на Ковровском экскаваторном заводе [41]. По сравнению с ранее применявшимися в приводе экскаваторов турбомуфтами с масляным наполнением электромагнитные муфты позволили снизить колебания скорости дизеля и обеспечили большую производительность при меньшем расходе топлива. В результате ряда опытно-конструкторских работ на Ковровском экскаваторном заводе был сделан вывод о целесообразности

применения в электромагнитных муфтах индукторов с когтеобразными полюсами, так как при этом получается «более мощная конструкция при сравнительно небольших радиальных размерах муфты» [54]. Один из первых образцов электромагнитных муфт Ковровского завода, предназначенных для привода экскаваторов Э-504 и Э-505, показан на рис. 27.

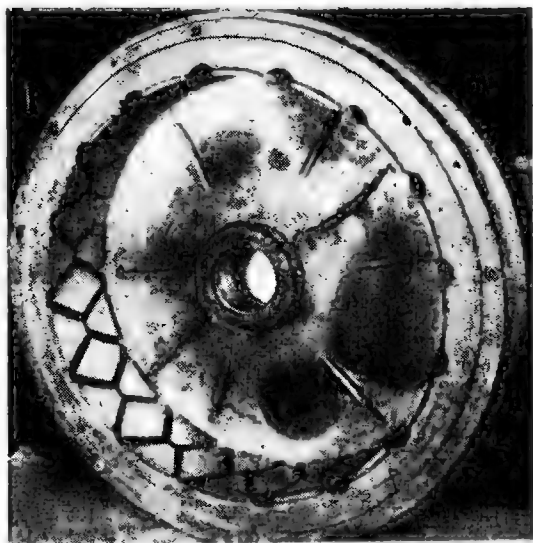


Рис. 26. Сдвоенный когтеобразный индуктор для электромагнитной муфты скольжения (фирма «Дайнаматик Корпорейшн»).

Несколько иная конструкция, использованная в дизель-электрическом экскаваторе Э-509, приведена на рис. 28. Отличительной особенностью этой муфты является использование магнитного потока полюсов не только для передачи крутящего момента, но и для растормаживания пружинного тормоза. Это обеспечивает одновременность действия тормоза с выключением возбуждения муфты и тем самым упрощает управление машиной [54].

Интересный пример применения электромагнитных муфт скольжения недавно представила английская фирма «Томсон—Хаустон» (British Thomson—Houston). Этой фирмой был выпущен бесколлекторный электродвигатель переменного тока с регулируемой скоростью вращения под наименованием «Варислип мотор» [45]. Этот электродвигатель (рис. 29) представляет собой комбинированную конструкцию, состоя-

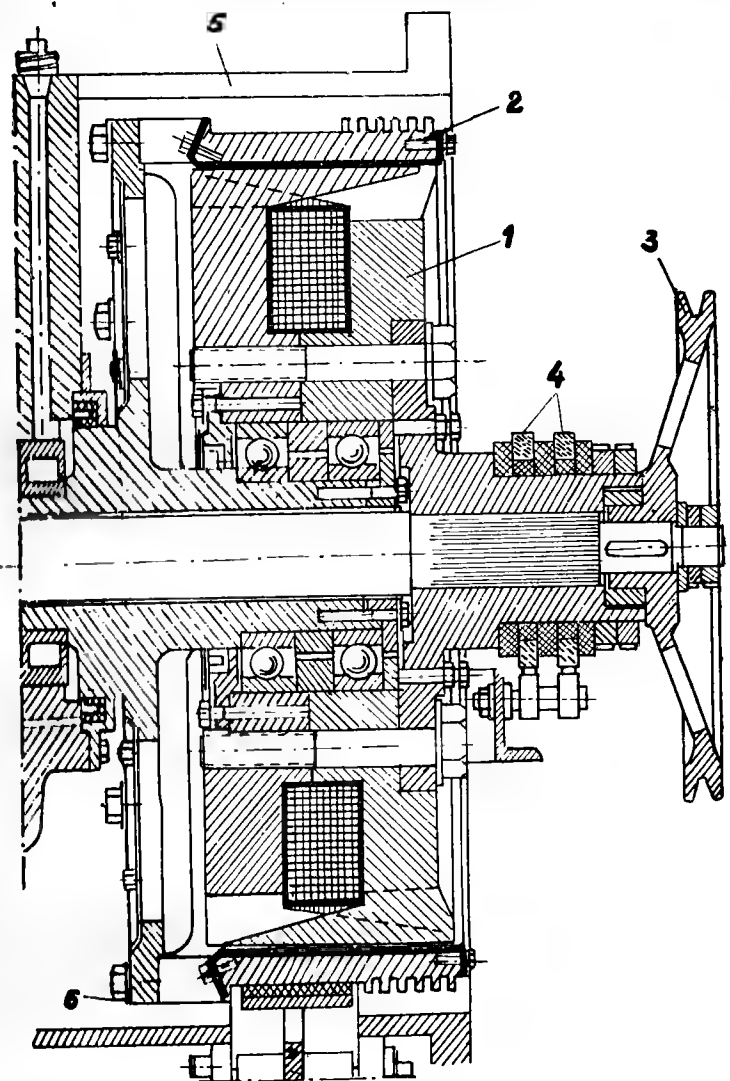


Рис. 27. Электромагнитная муфта скольжения для привода экскаваторов Э-504 и Э-505 (Ковровский экскаваторный завод):

1 — магнитная система с когтеобразными полюсами; 2 — якорь муфты; 3 — шкив; 4 — контактные кольца; 5 — корпус муфты; 6 — электромагнитный тормоз.

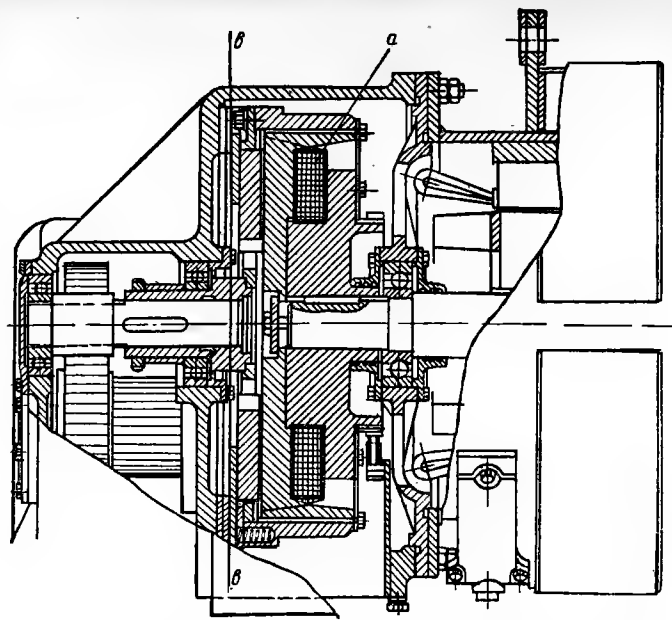


Рис. 28. Электромагнитная муфта привода хода дизель-электрического экскаватора Э-509 (Ковровский экскаваторный завод).

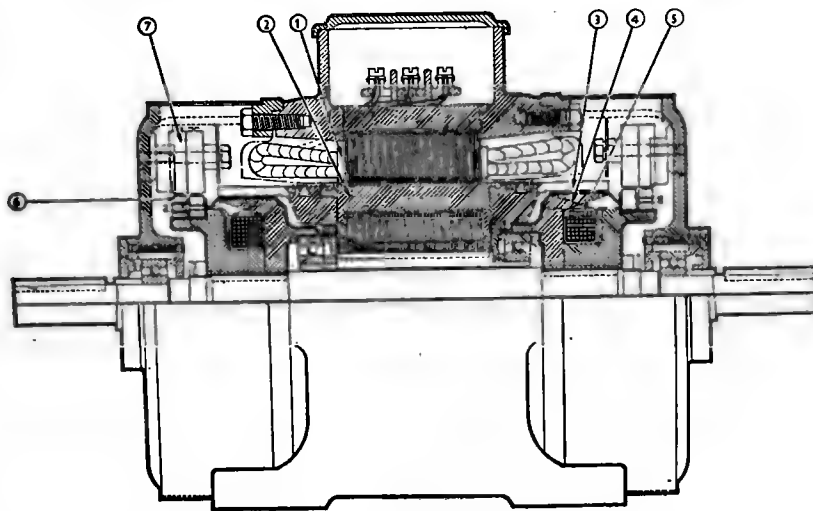


Рис. 29. Бесколлекторный электродвигатель переменного тока с регулируемой скоростью вращения (фирма «Томсон-Хаустон»):

1 — статор двигателя; 2 — короткозамкнутый ротор двигателя; 3 — массивный якорь муфты скольжения; 4 — когтеобразные полюса индуктора муфты скольжения; 5 — катушка возбуждения муфты; 6 — контактные кольца; 7 — щеточный аппарат для подвода тока к катушке возбуждения муфты.

шую из асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором и двух муфт скольжения, размещенных по обеим сторонам пакета статора, внутри лобовых частей обмотки последнего. Внешние части муфт в виде стальных полых цилиндров укреплены по бокам короткозамыкающих колец заливки ротора и вместе с последним монтируются на валу машины на шариковых подшипниках, так что при невозбужденных муфтах и неподвижном вале ротор может вращаться с полной скоростью. Внутри полых цилиндров располагаются жестко закрепленные на валу индукторы муфт скольжения с когтеобразными полюсами и круглыми катушками возбуждения. Ток для питания этих катушек подводится с помощью контактных колец и щеток, размещенных с обоих торцов машины. Путем изменения тока возбуждения можно при данном моменте изменять скорость вращения выходного вала.

Электродвигатель «Варислип» сконструирован специально для привода лебедки. Кроме того, эта машина испытывалась также и качестве приводного двигателя подъема и перемещения в мостовом кране.

5. АВТОМОБИЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Идея применения переменного тока для электроснабжения автомобилей и тракторов имеет уже более чем двадцатилетнюю историю. Еще в 1936 г. сотрудником ВЭИ А. С. Кантером были сформулированы основные принципы применения переменного тока в автотракторном электрооборудовании [10]. Тогда А. С. Кантер предложил заменить сложный и требовательный к уходу генератор постоянного тока более простым и надежным генератором переменного тока, работающим через комплект полупроводниковых (купроксных или селеновых) выпрямителей или даже без них. Тогда же были проведены первые опыты применения генератора переменного тока на тракторе, давшие удовлетворительные результаты и подтвердившие основные преимущества новой системы — повышенную надежность в эксплуатации, простоту устройства и не требовательность в обслуживании [19]. Великая Отечественная война прервала эти работы. Однако уже во время войны идея применения переменного тока получила известное развитие в работах американских фирм, производящих авиационное и автомобильное электрооборудование [14]. В 1946 г. появилось сообщение фирмы «Лис — Невилль» (Leese — Neville) о первых положительных результатах работы опытной установки переменного тока [16], а в 1947 г. были опубликованы более

подробные сведения об этой установке [17, 21]. Из опубликованных данных явствовало, что в качестве генератора (рис. 30) в этой установке использована небольшая синхронная машина с когтеобразными полюсами. Статор этого генератора (рис. 31)

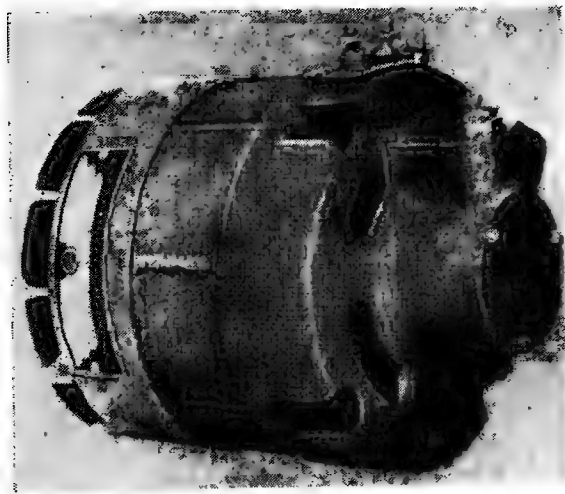


Рис. 30. Генератор переменного тока (7 в, 60 а) для электроснабжения автомобилей (фирма «Лис—Невилль»).

имел трехфазную стержневую обмотку, соединенную в звезду и рассчитанную на получение выходного (после выпрямителя) напряжения в 7 в при токе нагрузки 60 а. Мощность установки была равна таким образом 420 вт. Ротор генератора состоял

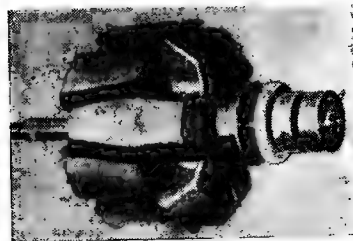
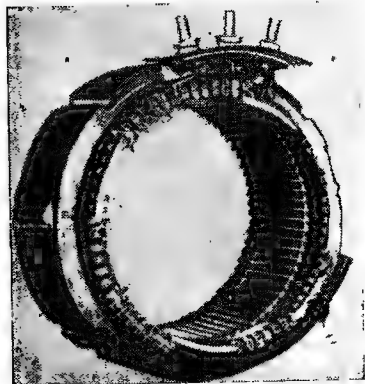


Рис. 31. Статор и ротор генератора фирмы «Лис—Невилль».

из двух одинаковых отливок, снабженных каждая 6 выступами — когтеобразными полюсами, образующими «параллельные магнитные пути» [21]. Между отливками, как обычно, была расположена катушка возбуждения. Концы катушки возбуждения были выведены к контактным кольцам, расположенным на конце вала за подшипником и изолированным от влияния окружающей среды специальной камерой, в результате чего генератор оказывался практически взрывобезопасным. Простота и прочность конструкции ротора делали его пригодным для применения в весьма большом диапазоне скоростей: от 450 об/мин при холостом ходе автомобильного двигателя до 10—12 тыс. об/мин при максимальной скорости вращения.

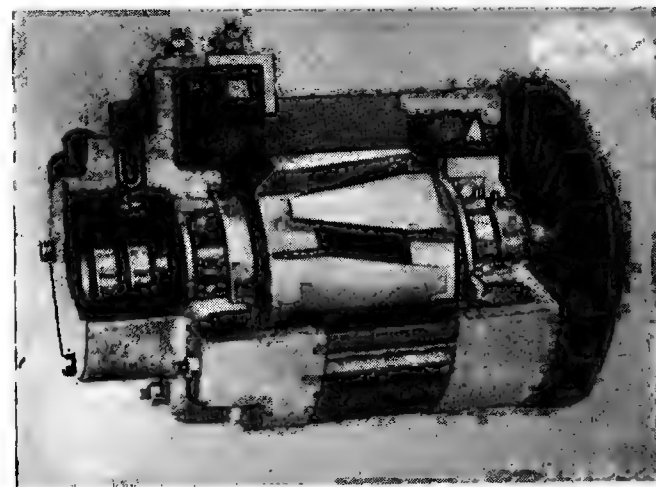


Рис. 32. Генератор с когтеобразными полюсами для электроснабжения автомобилей (фирма «Сцинтилла»).

Конструкция генератора фирмы «Лис — Невилль» оказалась весьма удачной и получила широкое распространение.

Кроме американской фирмы «Лис — Невилль», которая продолжала совершенствовать свою установку [24], подобные же генераторы начала выпускать также швейцарская фирма «Сцинтилла» (Scintilla) (рис. 32) и английская фирма «КАВ» (CAV) (рис. 33).

В 1948 г. большая работа по применению переменного тока в автомобильном электрооборудовании была развернута в НИИ Автоприборов и на заводе АТЭ-1 [25]. В результате этой работы в 1952 г. была создана установка для электроснабжения автобусов ЗИС-155 [29, 31], в которой был применен

генератор типа Г-2 (рис. 34) мощностью 750 вт ($12,5 \text{ в} \times 60 \text{ а}$), подобный по конструкции генератору фирмы «Лис — Невилль». Эта установка оказалась более чем в два раза легче и дешевле генератора постоянного тока, успешно выдержала серьезные эксплуатационные испытания [31] и в 1954 г. была внедрена в серийное производство.

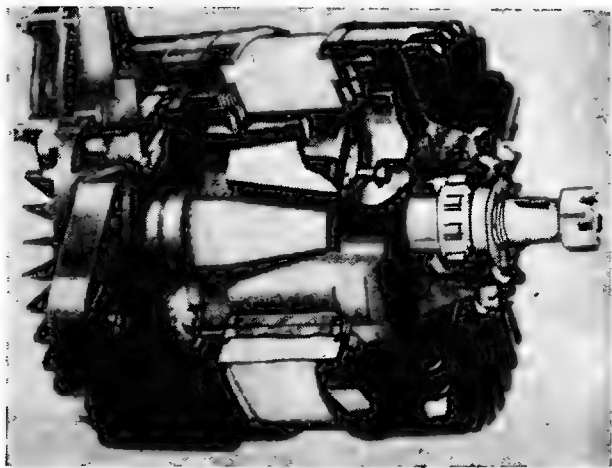


Рис. 33. Генератор с когтеобразными полюсами для электроснабжения автомобилей (фирма «КАВ»).

Параллельно с работой над генератором Г-2 велась разработка генератора Г-3 для междугородного автобуса ЗИС-127. Генератор Г-3 (рис. 35) по конструкции был подобен Г-2 [43], но был рассчитан на значительно большую мощность (2000 вт).

В 1954—1955 гг. генераторы Г-2 и Г-3 были переданы для серийного производства на завод КАТЭК (г. Куйбышев), где впоследствии подверглись значительной модернизации, в результате которой был значительно снижен вес этих машин [49]. Работы в этом направлении продолжаются и в настоящее время.

В 1958 г. появились сообщения [63] о разработанном американской фирмой «Дэлко Реми» (Delco Remy) бесконтактном генераторе с когтеобразными полюсами для электроснабжения автомобилей (рис. 36). Насколько можно судить по рекламным материалам, в основе конструкции этого генератора лежит та же идея консольного ротора, которая была приме-

нена фирмой «Алиот» еще в 1895 г. (см. рис. 15). Отличительной особенностью конструкции фирмы «Дэлко Реми» является расположение обоих подшипников на подшипниковом щите со стороны привода и применение встроенных кремниевых выпрямителей. По утверждению фирмы, такие генераторы имеют по сравнению с генераторами постоянного тока вдвое меньший вес.

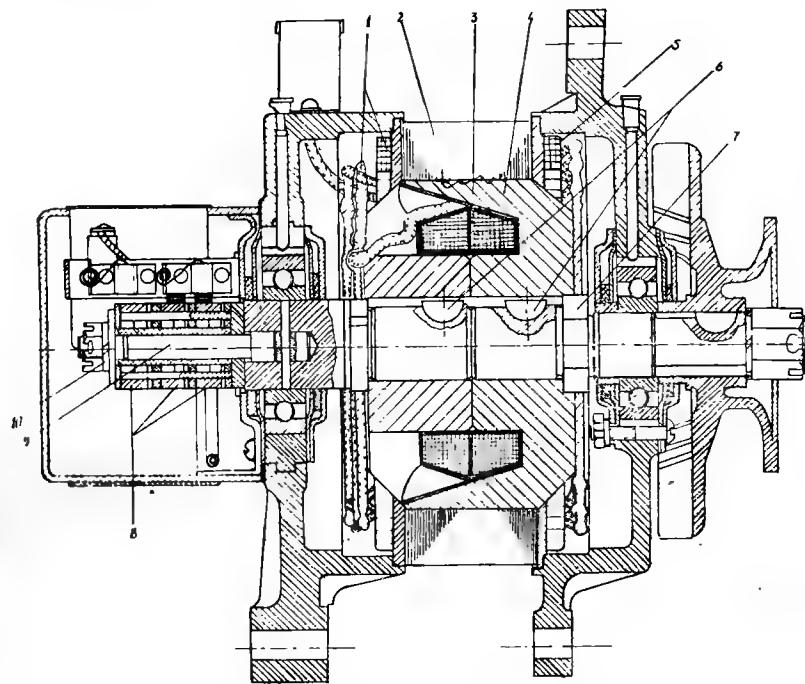


Рис. 34. Генератор типа Г-2 для электроснабжения автобусов ЗИС-155:

- 1 — обмотка статора; 2 — пакет статора; 3 — обмотка возбуждения;
- 4 — когтеобразные полюса; 5 — кольцевой держатель катушек статора;
- 6 — шпонки для крепления полюсных систем; 7 — стяжная гайка ротора;
- 8 — контактные кольца; 9 — вал контактных колец; 10 — гайка крепления контактных колец.

6. ГЕНЕРАТОРЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ

Вслед за автомобильным транспортом началось внедрение установок с генераторами переменного тока и на железнодорожном транспорте — в электроснабжении пассажирских

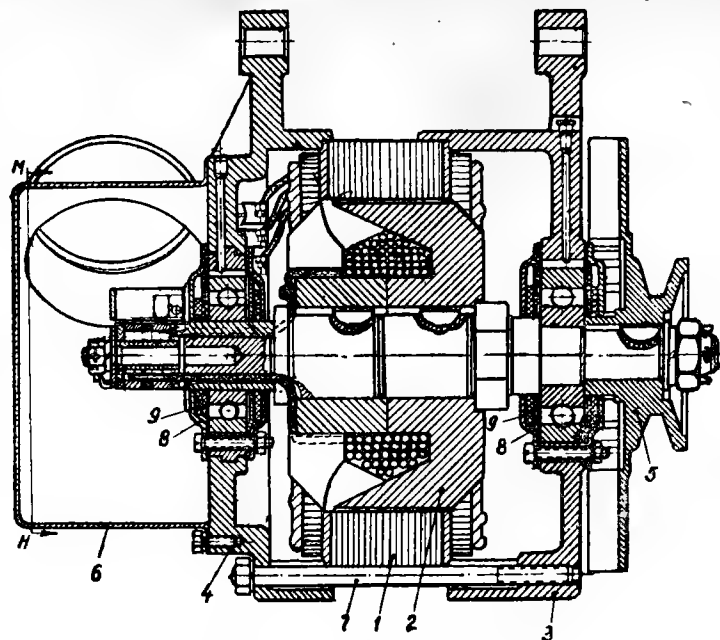


Рис. 35. Генератор типа Г-3 для электроснабжения междугородних автобусов ЗИС-127:

1 — статор; 2 — ротор; 3, 4 — подшипниковые щиты; 5 — шкив с вентилятором; 6 — крышка; 7 — стяжные шпильки; 8 — крышка сальника; 9 — сальник.

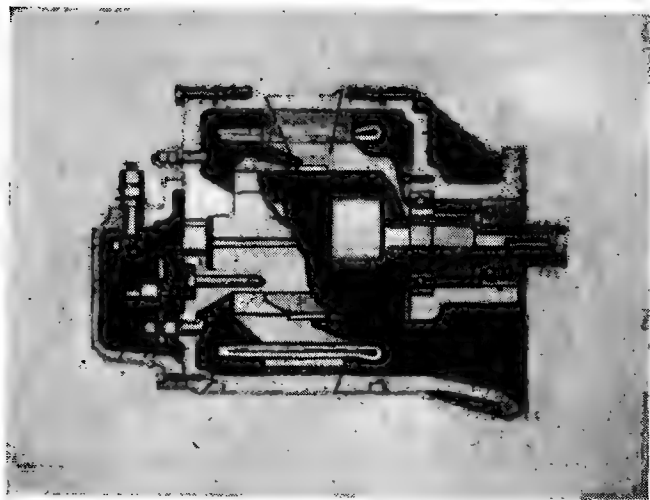


Рис. 36. Бесконтактный генератор со встроенными кремниевыми выпрямителями для электроснабжения автомобилей (фирма «Дэлко Реми»).

и служебных вагонов. Первые попытки применения для этой цели генераторов переменного тока имели место еще в 30-х гг., однако эта первая установка не получила распространения. Вторым шагом были попытки [32] использования описанной выше автомобильной установки фирмы «Лис — Невилль» с генератором переменного тока типа 5184G6 (14 в, 75 а) и выпрямителем для электроснабжения служебных вагонов товарных поездов (так называемых кабузов). Эта попытка также не дала заметных практических результатов.

В 1951 г. в Институте энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР по инициативе Рижского электромашиностроительного завода была начата систематическая работа в области электроснабжения пассажирских вагонов выпрямленным переменным током [27]. К этому моменту конструкция с когтеобразными полюсами уже хорошо зарекомендовала себя в автомобильном и других видах электрооборудования, и поэтому без особой дискуссии она была признана одной из наиболее подходящих для синхронного генератора в электроснабжении вагонов [28, 35, 37]. В результате в 1953 г. был спроектирован, построен и испытан генератор типа СВ-1 [35, 37].

Это обычная трехфазная синхронная машина с когтеобразными полюсами и вращающейся обмоткой возбуждения (рис. 37 и 38), рассчитанная на мощность 7 ква при скорости вращения от 750 до 3000 об/мин. Машина имеет закрытое исполнение, внешняя поверхность ее для улучшения охлаждения выполнена ребристой. Число полюсов генератора равняется 10, частота — от 62,5 до 250 гц (в зависимости от скорости вращения). Обмотка статора (рис. 39а) — двухслойная, петлевая, секционная. Число пазов — 42, число пазов на полюс и фазу $q = 1\frac{2}{5}$, пазы полуоткрытой формы. Ротор машины (рис. 39б) состоит из трех стальных отливок (штулки и двух полюсных систем) и катушки возбуждения (рис. 39б). Концы катушки возбуждения выведены к контактным кольцам, расположенным на конце вала, снаружи подшипникового узла. Необходимая для питания обмотки возбуждения при полной нагрузке и минимальной скорости вращения мощность составляет 250 вт, т. е. 3,5% от мощности машины. Вес генератора равен 270 кг, удельный весовой показатель, приведенный к 1000 об/мин, — 29 кг/квт.

Параллельно с работой над генератором СВ-1 в Институте энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР разрабатывался бесконтактный вариант подобной машины. Основываясь на идеях построения бесконтактных сельсинов, сотрудники Института разработали новую конструкцию синхронной машины с когтеобразными полюсами — СВ-2 [36,

37, 42]. Опытный образец этого генератора (рис. 40) выполнен на базе машины СВ-1 и имеет с ним много общих деталей. Так, машины СВ-1 и СВ-2 имеют совершенно одинаковые статоры (рис. 39а), подшипниковые узлы, отливки для подшипниковых узлов, почти одинаковый общий вид (см. рис. 38). Существенно отличается лишь ротор машины, который представляет собой две стальные отливки — полюсные системы, посаженные на общий вал (рис. 41а).

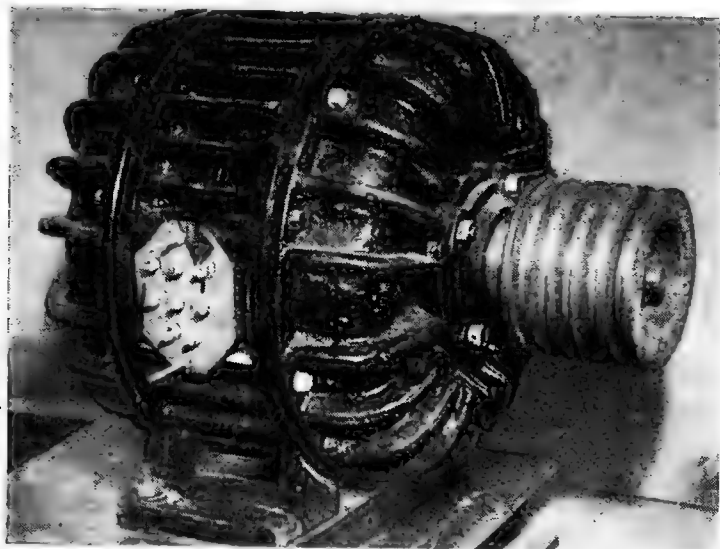


Рис. 38. Общий вид генераторов СВ-1 и СВ-2.

Каждая полюсная система состоит из цилиндрической части (цилиндра ротора) и отходящих от нее когтеобразных выступов — полюсов. Полюсные системы насаживаются на вал таким образом, чтобы когтеобразные выступы одной системы оказались в промежутках между выступами другой системы. Магнитный поток передается ротору со стороны подшипниковых щитов машины, для чего на последних имеются когтеобразные приливы, охватывающие с небольшими зазорами (0,5 мм) цилиндры ротора и служащие, кроме того, для размещения катушек возбуждения (рис. 41б).

Основные данные генератора СВ-2 остались теми же, что и в машине СВ-1, за исключением лишь расхода меди на обмотку возбуждения, который повысился с 5,1 до 13,8 кг; мощности возбуждения, которая снизилась до 200 вт (менее 3% от мощности машины); полного веса генератора, который

увеличился до 320 кг и удельного весового показателя, увеличившегося до 34 кг/квт (при 1000 об/мин).

Несмотря на некоторые недостатки, генератор СВ-2, ввиду отсутствия скользящих контактов, признан все же наиболее под-

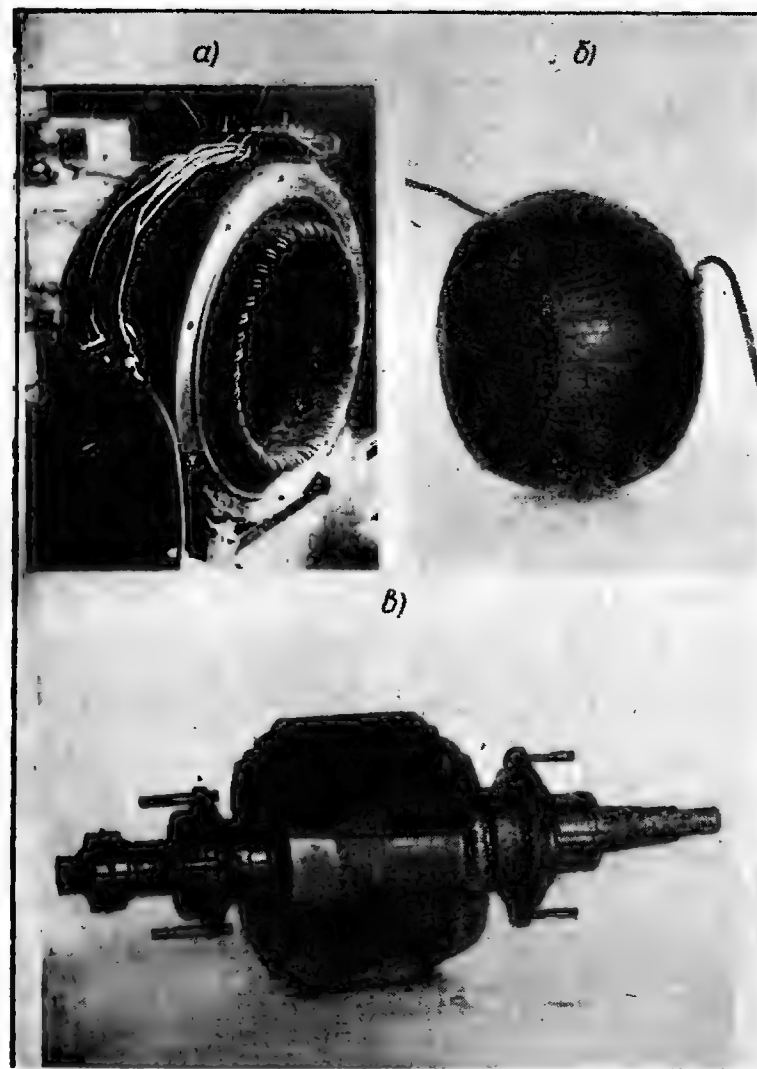


Рис. 39. Детали генератора СВ-1:
а — статор; б — катушка возбуждения; в — ротор.

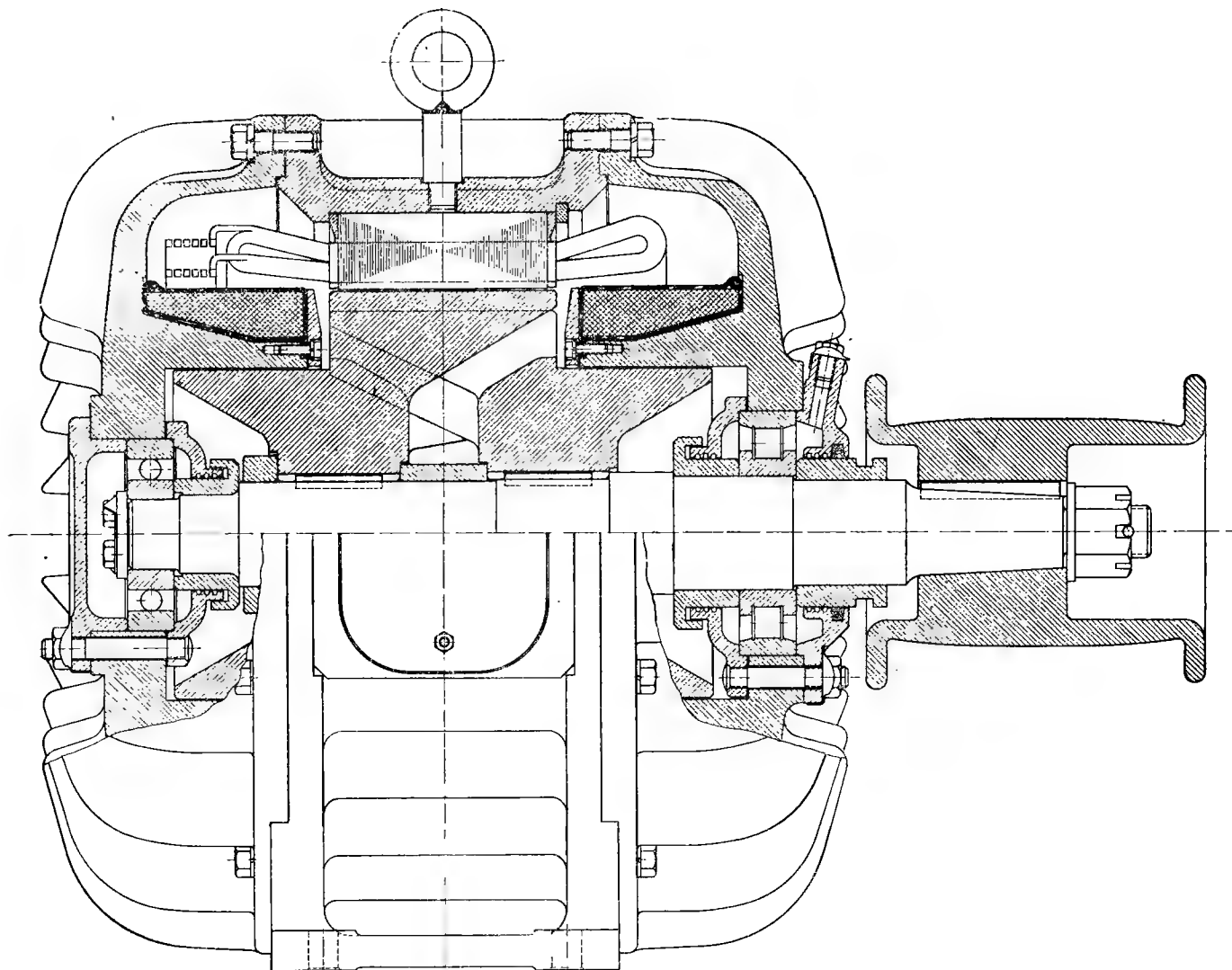


Рис. 37. Бесконтактный синхронный генератор типа СВ-2 (7 кет, 50 в, 750 об/мин) для электроснабжения железнодорожных вагонов.

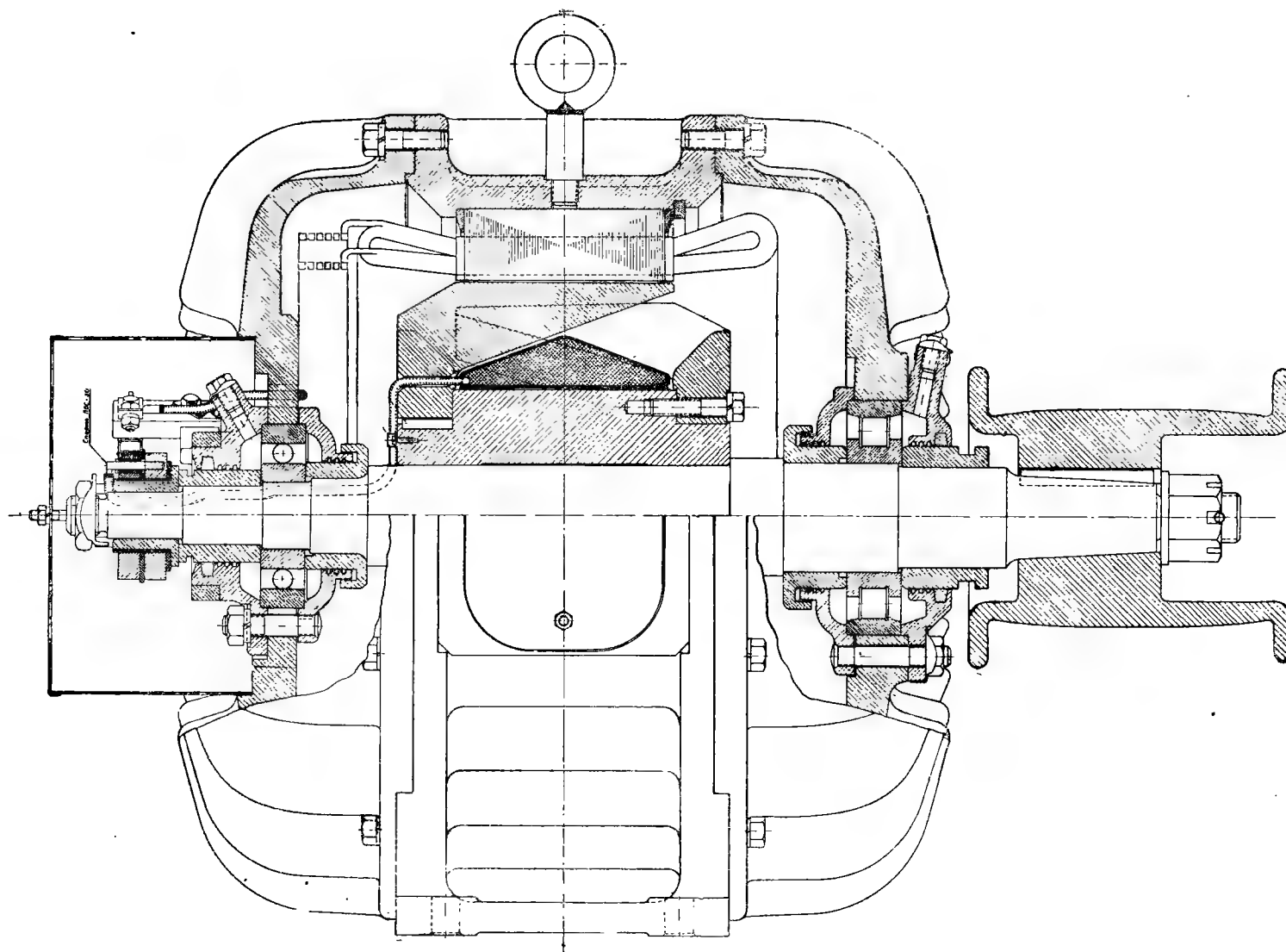


Рис. 40. Синхронный генератор типа СВ-1 (7 кВт, 50 в, 750 об/мин) для электроснабжения железнодорожных пассажирских вагонов (ИЭЭ АН Латвийской ССР).



Рис. 41. Детали генератора СВ-2:

а — ротор; б — подшипниковый щит с катушкой возбуждения; в — катушка возбуждения.

ходящим для применения в разработанной Институтом новой системе электроснабжения пассажирских железнодорожных вагонов [34, 40]. Большое удобство представляет, в частности, возможность применения эффективно работающей серийной обмотки возбуждения генератора, которая состоит из 12 витков, намотанных по обеим сторонам машины — на лобовых частях обмотки статора, и питается непосредственно выпрямленным током нагрузки генератора (рис. 42).

Рис. 42. Принципиальная схема новой системы электроснабжения вагонов (ИЭЭ АН Латвийской ССР):

СГ — синхронный генератор; ТР — трансформатор; Р — рубильник; В₁, В₂ — полупроводниковые выпрямители; Л — ламповая нагрузка вагонной сети; ДВ — двигатель вентилятора вагона; R_д — нелинейное сопротивление для бесконтактного перехода аккумуляторной батареи с разряда на заряд и обратно; Б — аккумуляторная батарея; РН — регулятор напряжения.

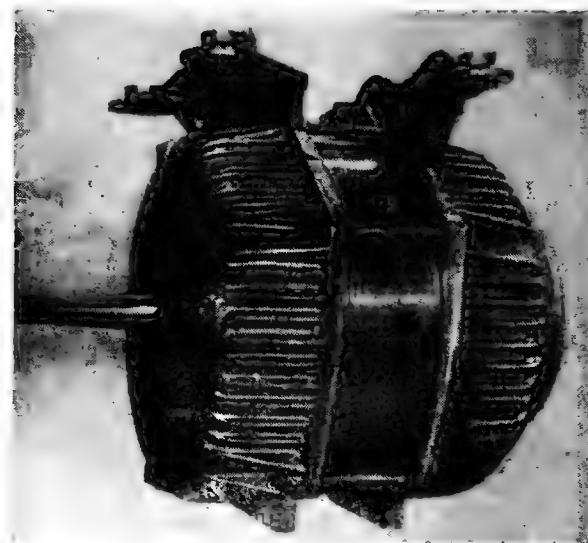
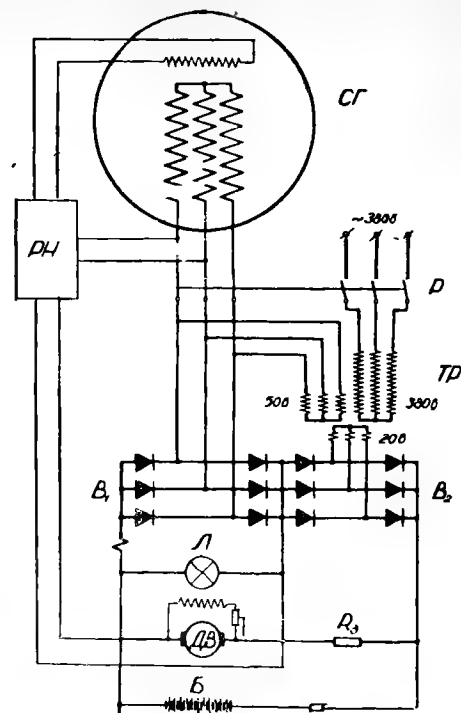


Рис. 43. Генератор для электроснабжения кабузов (фирма «Дженерал Электрик»).

Эксплуатационные испытания новой системы электроснабжения, продолжавшиеся с августа 1955 г. до настоящего времени, полностью подтвердили правильность сделанного выбора конструкции генератора: за четыре года эксплуатации генератор не требовал никакого ухода, кроме смазки подшипников, и ни разу не ремонтировался. Поэтому он был рекомендован для применения в серийных образцах новой системы, переданной в 1957 г. для производства на Рижский электромашиностроительный завод (РЭЗ).

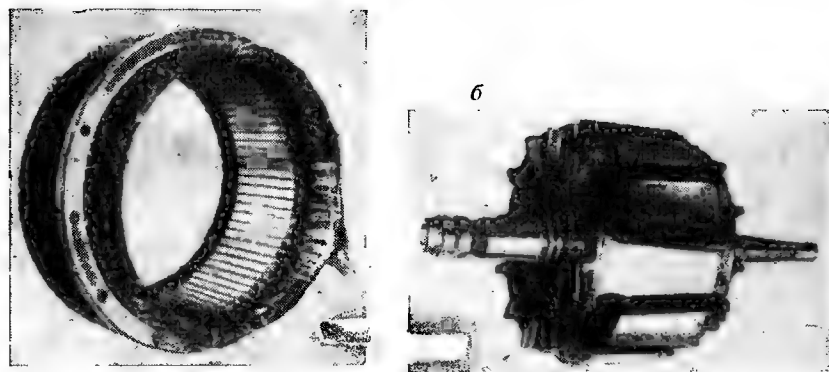


Рис. 44. Детали генератора фирмы «Дженерал Электрик»: а — статор; б — ротор.

Почти одновременно с Институтом энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР аналогичные работы проводила фирма «Дженерал Электрик» (General Electric) [32], которая поставила себе целью разработать систему электроснабжения с генератором переменного тока для служебного вагона товарного поезда. Весьма знаменательным при этом явилось то обстоятельство, что конструкторы «Дженерал Электрик» тоже пришли к выводу о целесообразности применения генератора с когтеобразной конструкцией полюсов.

При конструировании этого генератора (рис. 43) большое внимание было уделено максимальному снижению веса машины. С этой целью статор генератора (рис. 44а) выполнен в виде спрессованного и скрепленного шпильками пакета стальных листов без станины. Обмотка статора размещена в 72 пазах. Ротор генератора имеет обычную когтеобразную конструкцию, число полюсов равно 12. Некоторой отличительной особенностью этого ротора является наличие небольших вентиляционных лопаток, расположенных по торцам магнитной системы ротора (рис. 43б). Подшипниковые щиты машины

готовлены из алюминия и имеют охлаждающие ребра как снаружи, так и внутри. Генератор рассчитан на работу при скоростях вращения от 537 до 5070 об/мин при напряжении 45 в и токе 80 а (на выходе выпрямителя). С учетом к.п.д. выпрямителя (0,87) мощность генератора может быть оценена примерно в 4,1 квт. Вес машины равен 185 кг; удельный весовой показатель, приведенный к 1000 об/мин — 24 кг/квт. -

После проведения длительных эксплуатационных испытаний фирма начала выпускать генератор в значительных количествах.

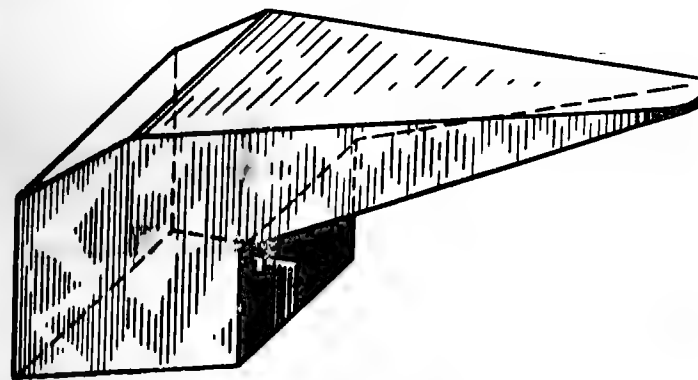


Рис. 45. Когтеобразный полюс с очертанием по синусоиде.

В последние годы в Институте энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР было создано еще несколько образцов бесконтактных генераторов, отличающихся малым весом, для электроснабжения вагонов. В 1957 г. в Институте был разработан специальный вариант когтеобразных полюсов с очертанием по синусоиде [51] (рис. 45). Как показали проведенные в Институте исследования (см. главу VI), такая форма полюса позволяет значительно лучше использовать габариты машины и благодаря этому, снизить ее вес.

В течение 1957—1959 гг. были разработаны, построены и испытаны два варианта машин с синусоидальными полюсами. Первая из этих машин — СВ-3 (рис. 46, 47) — отличается применением катушечной обмотки статора с числом пазов на полюс и фазу, равным $1/2$, и размещением обмоток возбуждения сбоку от лобовых частей обмотки статора, что позволило заметно уменьшить диаметр машины. Генератор СВ-3 имеет 12 полюсов и при весе 160 кг отдает мощность 5 квт при 1000 об/мин, имея, таким образом, удельный весовой показатель 32 кг/квт.

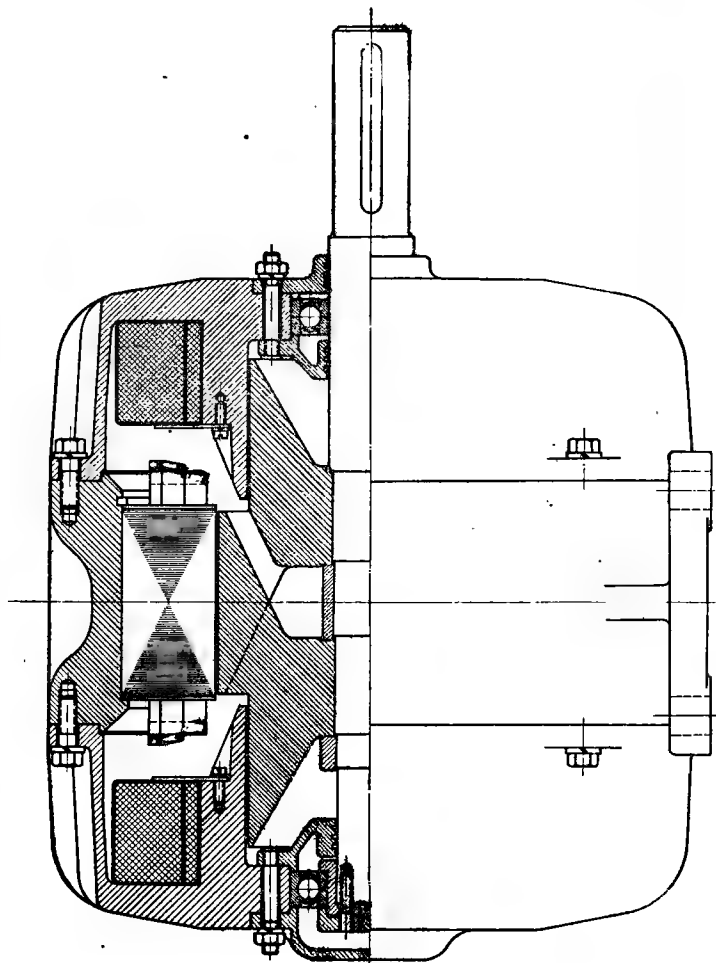


Рис. 46. Бесконтактный генератор с синусоидальными полюсами СВ-3 (ИЭЭ АН Латвийской ССР).

Второй образец — машина СВ-4 (рис. 48, 49) — отличается уменьшенным числом полюсов, которое выбрано равным 6, и применением нормальной выпонной обмотки статора с числом полюсов на полюс и фазу, равным 2. Вес машины СВ-4 равен 196 кг, а отдаваемая мощность — 7 кВт при 1000 об/мин. Удельный весовой показатель, таким образом, снизился до 28 кг/квт.

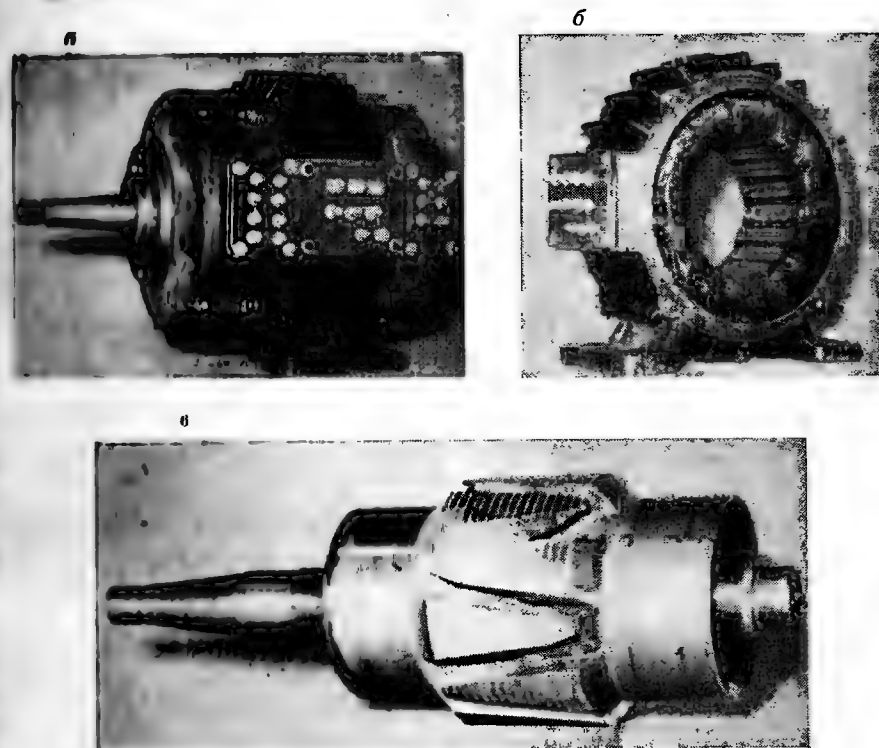


Рис. 47. Генератор СВ-3 и его детали:
а — общий вид; б — статор; в — ротор.

Помимо усовершенствования генератора для электроснабжения вагонов, в Институте энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР проводились также большие работы в области полупроводниковых выпрямителей. В результате была разработана специальная конструкция выпрямительного устройства, которую оказалось возможным разместить непосредственно на генераторе переменного тока и получить таким образом бесконтактный генератор постоянного тока [52].

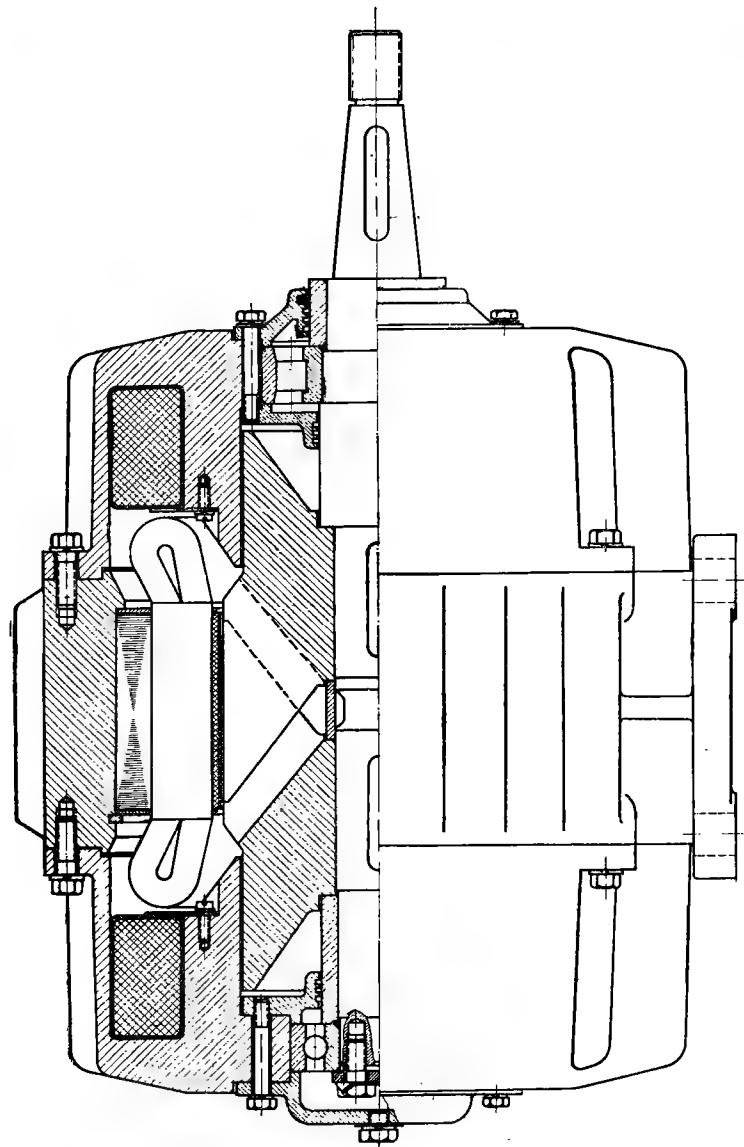


Рис. 48. Бесконтактный генератор с синусоидальными полюсами СВ-4 (ИЭЭ АН Латвийской ССР).

Опытный образец такого генератора, предназначенный для электроснабжения вагонов и получивший наименование СВП-1, был построен в 1958 г. на базе машины СВ-4. В этом генераторе (рис. 50, 51) выпрямительное устройство состоит из 12 германиевых вентилей типа ВГ-10, снабженных развитыми

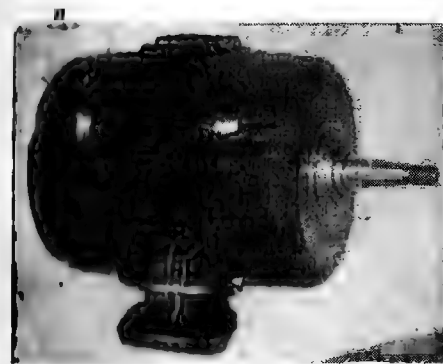


Рис. 49. Генератор СВ-4 и его детали:
а — общий вид; б — статор; в — ротор.

радиаторами (рис. 52). Между выпрямительным устройством и торцом машины размещается вентилятор, служащий для охлаждения вентилей и генератора.

Пытания генератора СВП-1 дали вполне удовлетворительные результаты.

Впоследствии был спроектирован и построен другой вариант бесконтактного генератора постоянного тока — типа СВП-3

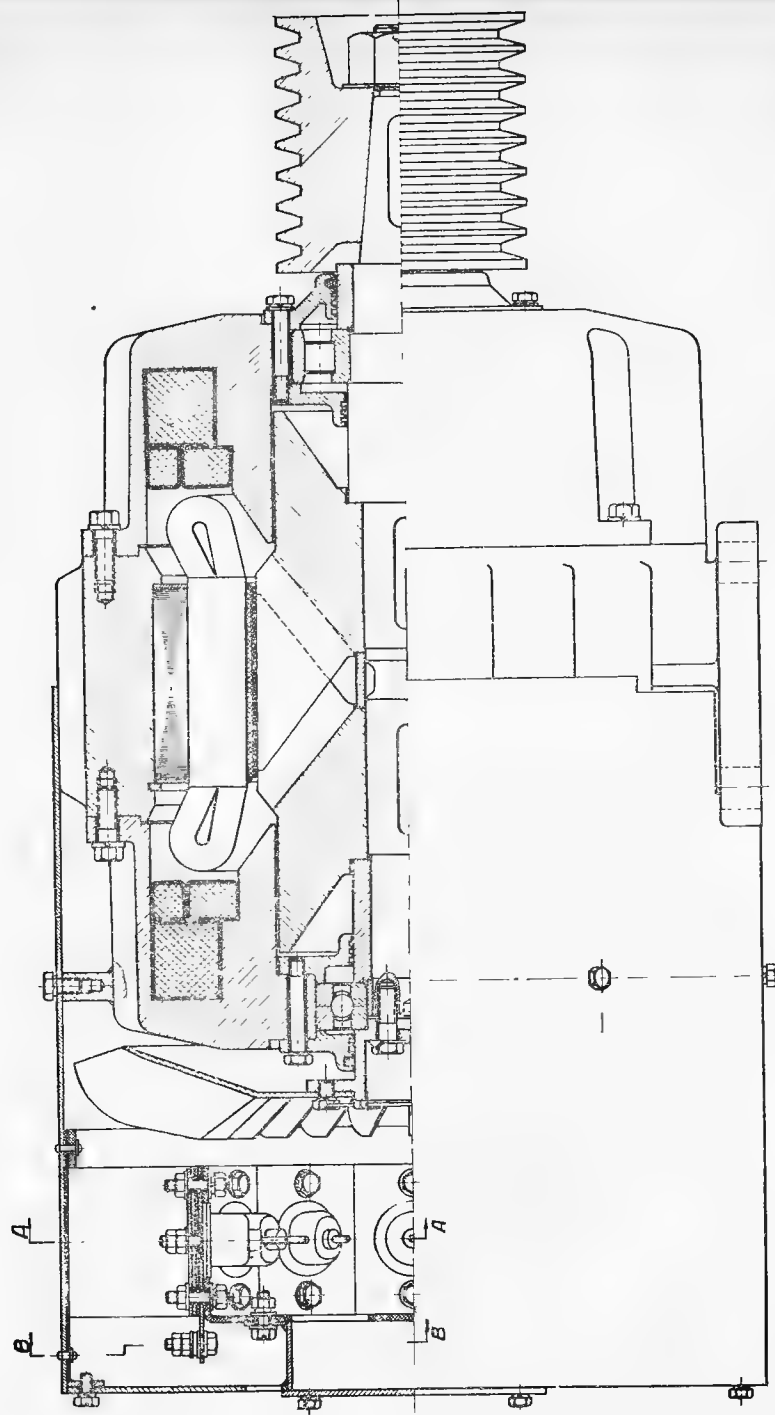


Рис. 50. Бесконтактный генератор постоянного тока типа СВП-1 для электроснабжения железнодорожных вагонов (ИЭЭ АН Латвийской ССР).

(рис. 53, 54), отличающийся размещением выпрямителя непосредственно на подшипниковом щите машины, в связи с чем внешний кожух перестал быть несущей деталью и выполнен значительно более легким.

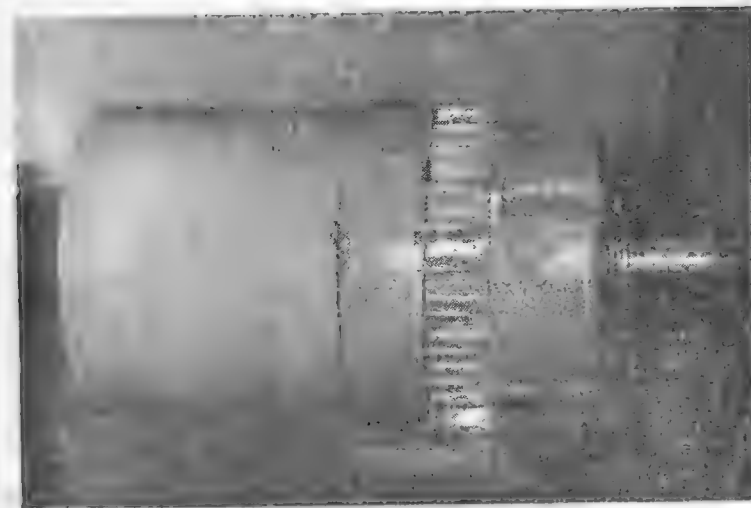


Рис. 51. Общий вид генератора СВП-1.

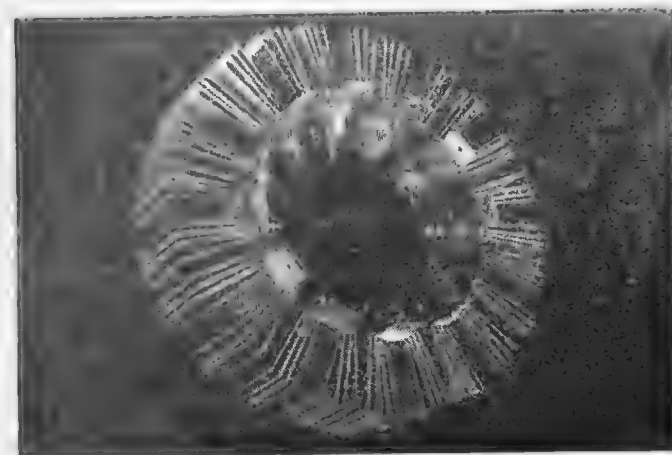


Рис. 52. Выпрямительное устройство генератора СВП-1.

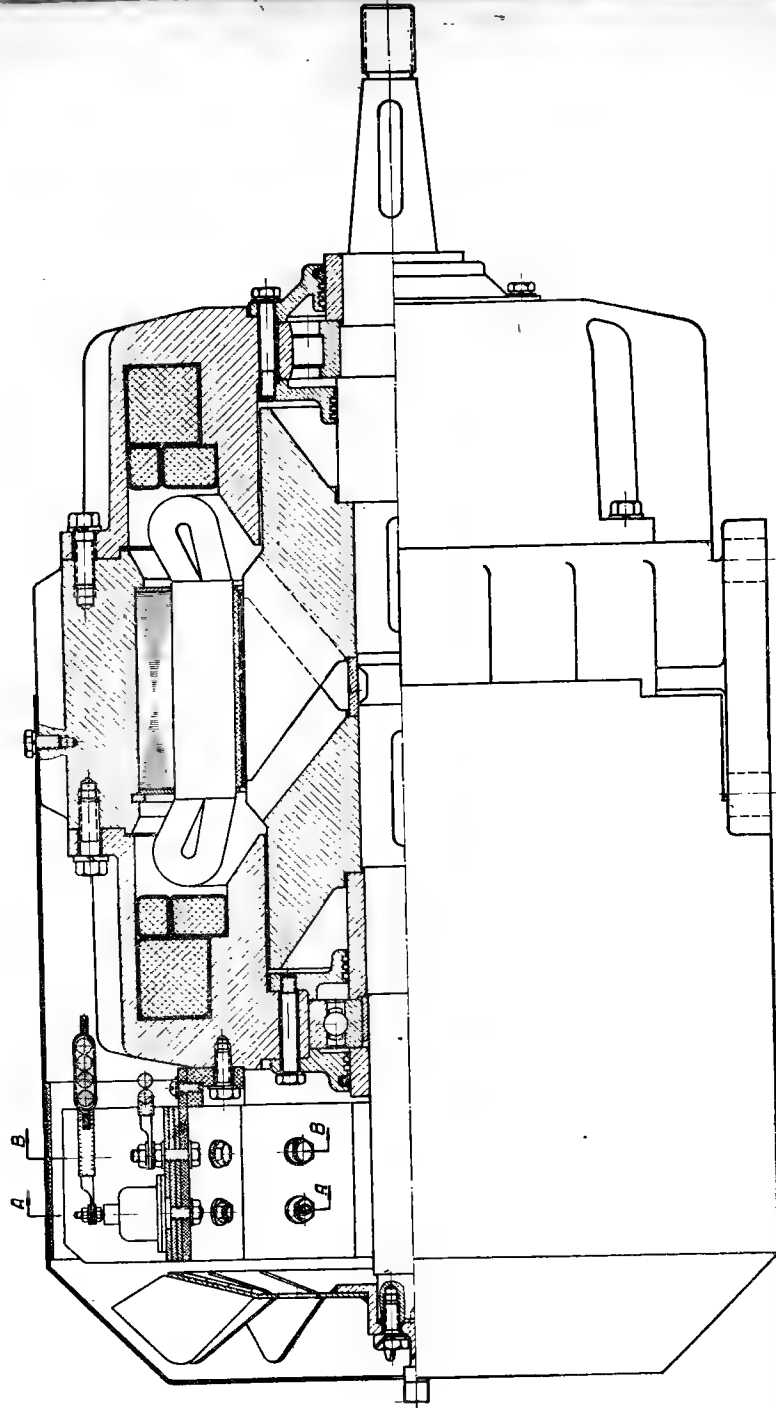


Рис. 53. Бесконтактный генератор постоянного тока типа СВП-3 для электроснабжения железнодорожных вагонов (ИЭЭ Латвийской ССР).

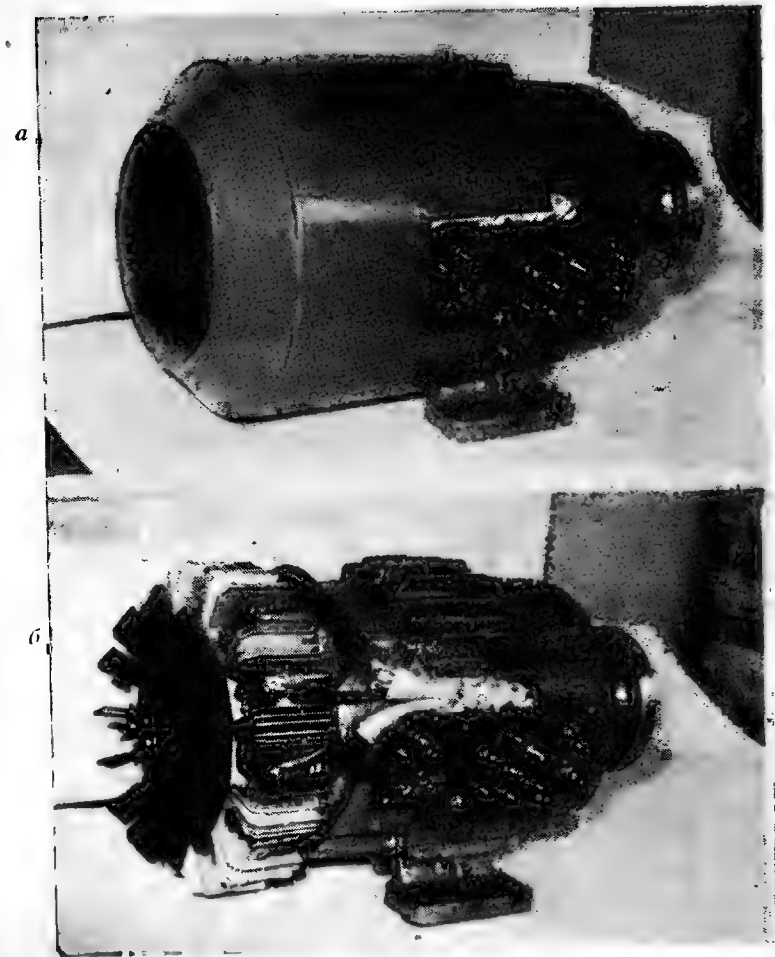


Рис. 54. Генератор СВП-3:
а — общий вид; б — вид со снятым кожухом.

7. БЕСКОНТАКТНЫЕ СИНХРОННЫЕ ДВИГАТЕЛИ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Еще в 1953 г. в процессе испытаний синхронной машины СВ-2 (см. рис. 38, 40) было замечено, что она вполне удовлетворительно запускается и, втягиваясь в синхронизм, работает в режиме синхронного двигателя. Впоследствии, в 1957—1958 гг., на базе машины СВ-2 в Институте энергетики и

электротехники Академии наук Латвийской ССР была разработана специальная конструкция синхронного двигателя, получившего наименование ДМК-1 [53]. От машины СВ-2 двигатель ДМК-1 (рис. 55, 56) отличается уменьшенным до 6 числом

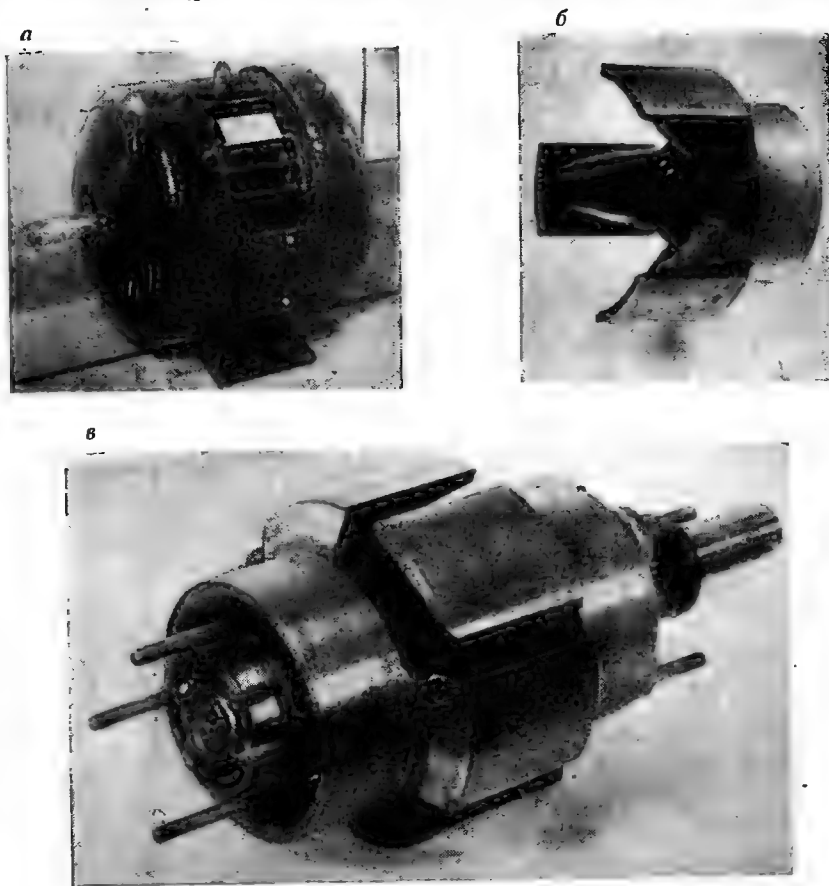


Рис. 56. Электродвигатель ДМК-1 и его детали:
а — общий вид; б — полюсная система; в — ротор.

полюсов, измененной обмоткой статора ($Z = 54$, $q = 3$), наличием небольших вентиляторов по бокам машины и оригинальной формой полюсов ротора. Эти полюса, имеющие в основе синусоидальные очертания, снабжены дополнительными приливами, увеличивающими площадь поверхности полюсов, обращенной к статору, и улучшающими тем самым условия пуска двигателя.

При испытаниях на стенде двигатель ДМК-1 показал вполне удовлетворительные результаты. В синхронном режиме при $\cos \varphi = 1,0$ его мощность равнялась 10 кВт, к.п.д. — 85%, скорость вращения — 1000 об/мин. Кратность пускового момента составила 1,5, кратность пускового тока — 3,0. Вес двигателя, как и у машины СВ-2, был равен 320 кг. Работы над бесконтактным синхронным двигателем проводились также в НИИ Электропромышленности. Там был разработан и испытан [44] синхронный двигатель с когтеобразными полюсами и обмоткой возбуждения на статоре мощностью 500 вт при скорости вращения 3000 об/мин и коэффициенте мощности, равном 1. Этот электродвигатель имеет двухполюсный ротор,

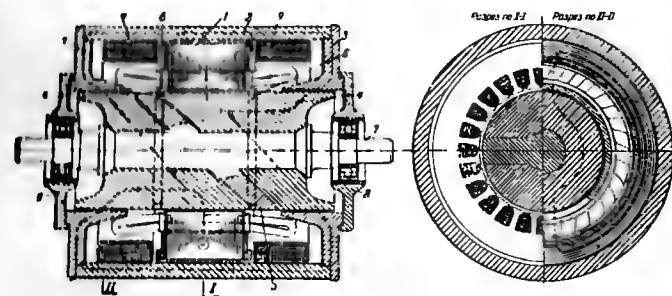


Рис. 57. Синхронный электродвигатель с внешнемagnetным потоком (ННЭП):

1 — статор; 2 — станина; 3 — подшипниковые щиты; 4 — полюсные системы ротора; 5 — заливка между полюсного пространства; 6 — кольца для улучшения пусковых качеств двигателя; 7 — вал машины; 8 — подшипниковые узлы; 9 — катушки возбуждения.

отличающийся тем, что для получения необходимых пусковых свойств пространство между полюсами заполнено немагнитным, но токопроводящим материалом 5 и, кроме того, по бокам активной части ротора расположены два немагнитных токопроводящих (медных) кольца 6 (рис. 57). Из немагнитного материала выполнены также вал 7 и крышки подшипников 8. Катушки возбуждения 9 расположены в станине двигателя. Расход мощности на возбуждение в номинальном режиме составляет 49 вт, т. е. почти 10% от мощности двигателя.

Исследования показали удовлетворительные качества этого двигателя: статическая перегружаемость получилась равной 1,5, кратность пускового момента — от 1 до 2,5 (в зависимости от конструктивных модификаций ротора).

Возможность использования бесконтактной машины в качестве двигателя отмечали также конструкторы фирмы «АЭГ» [38], подчеркивая при этом большие перспективы при-

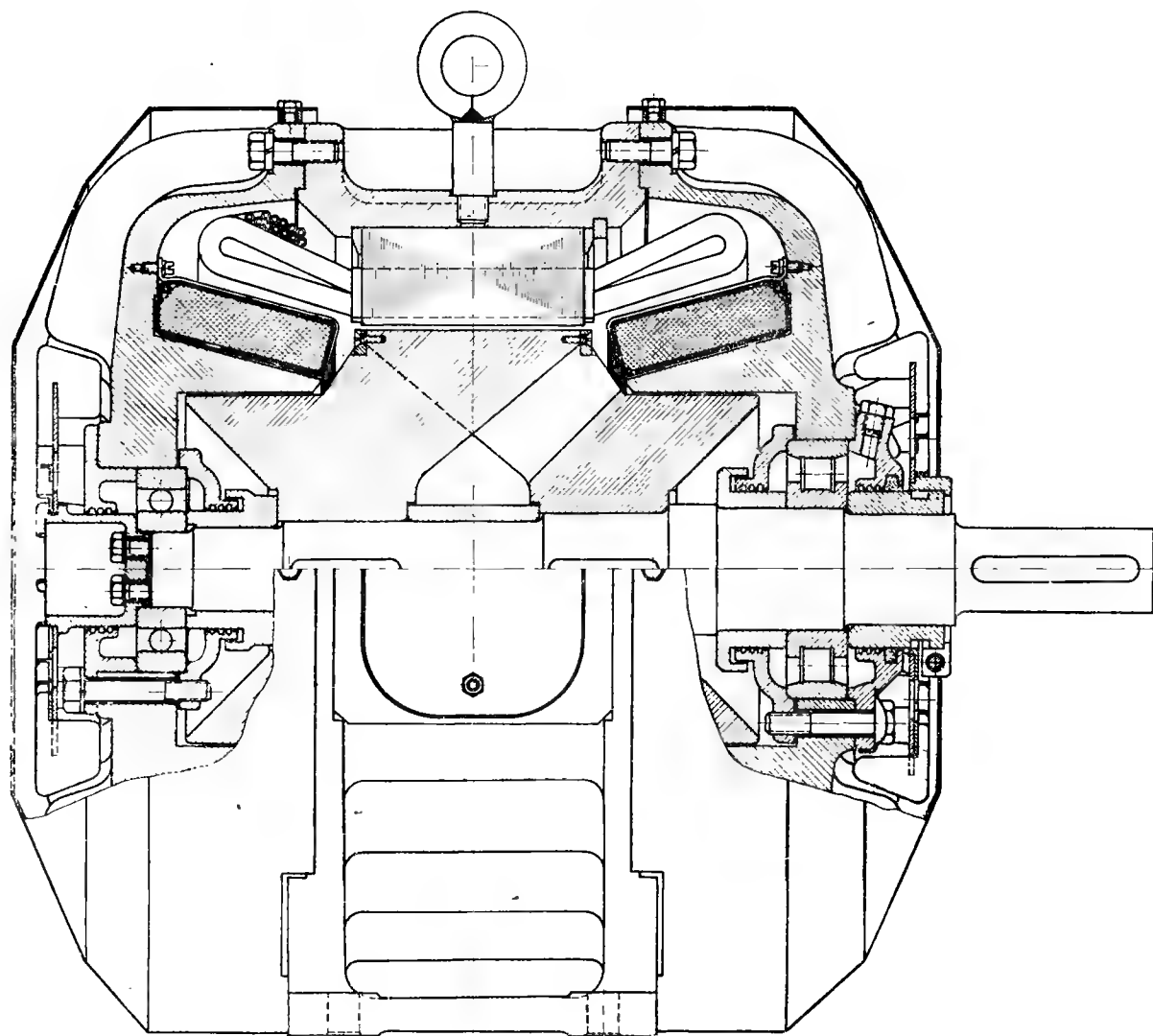


Рис. 55. Бесконтактный синхронный электродвигатель с асинхронным пуском типа ДМК-1 (ИЗЭ АН Латвийской ССР).

менения для возбуждения постоянных магнитов (см. рис. 22). Повышенное рассеяние когтеобразных полюсов в этом случае влияет положительно, ибо облегчает работу двигателя в процессе пуска и предохраняет постоянные магниты от размагничивания пусковыми токами [38]. Такие двигатели, по мнению фирмы, могли бы найти применение в целом ряде приводов, и в частности в контактных преобразователях.

В 1959 г. на базе исследований электродвигателя ДМК-1 в Институте энергетики и электротехники Академии наук Латвийской ССР были развернуты работы по проектированию нескольких типов бесконтактных синхронных двигателей, предназначенных для общепромышленного применения.

8. ГЕНЕРАТОРЫ ПЕРЕМЕННОГО И ПОСТОЯННОГО ТОКА ДЛЯ ОБЩЕПРОМЫШЛЕННОГО ПРИМЕНЕНИЯ

Создание бесконтактных синхронных генераторов и бесконтактных генераторов постоянного тока, не уступающих по своим весовым показателям машинам со скользящими контактами, позволило поставить вопрос о применении этих машин не только для таких узкоспециальных целей, как например для электроснабжения вагонов, но и для общепромышленного применения в более широких масштабах. Так возникло предложение разработать ряд бесконтактных синхронных машин — генераторов и двигателей мощностью от 1 до 100 кВт, которые в ряде случаев могли бы заменить более дорогостоящие явнополюсные генераторы с контактными кольцами и имеющие низкий коэффициент мощности асинхронные двигатели.

Сравнение весовых показателей бесконтактных машин с показателями выпускаемых серийно явнополюсных синхронных генераторов показывает (рис. 58), что бесконтактные машины имеют несколько лучшие весовые показатели, а по сравнению с асинхронными двигателями (рис. 59) — несколько худшие. Если учесть еще целый ряд положительных качеств бесконтактных машин (простоту, высокую надежность, оптимальный $\cos \varphi$ и т. п.), то в целом можно констатировать, что бесконтактные синхронные машины могут и должны найти достаточно широкое применение в народном хозяйстве нашей страны.

Помимо синхронных машин, вполне возможно и своевременно рекомендовать для общего применения также бесконтактные генераторы постоянного тока, которые в ряде случаев с успехом могут заменить коллекторные машины.

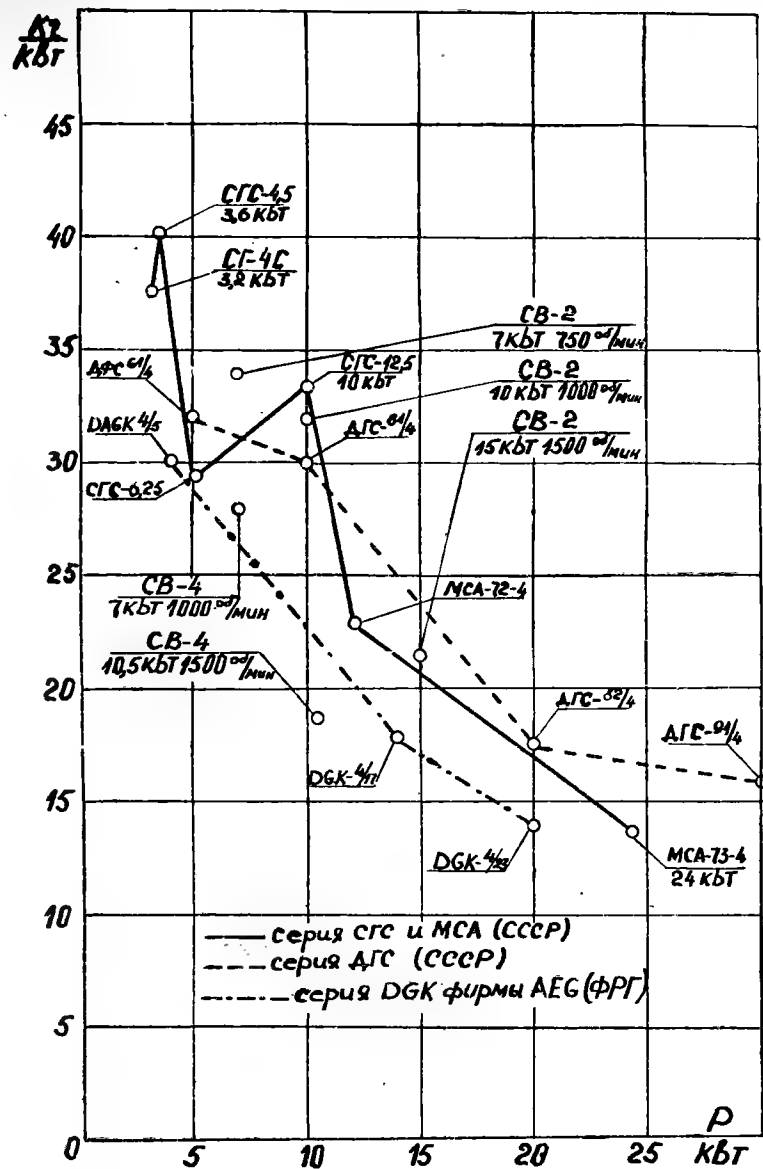


Рис. 58. Сравнение удельных весовых показателей различных синхронных генераторов небольшой мощности.

Из сравнения генератора СВП-1 с выпускаемыми серийно коллекторными генераторами постоянного тока серии ПН видно, что, несмотря на полное отсутствие скользящих контактов, генератор СВП-1 по удельным весовым показателям не уступает обычным коллекторным генераторам (рис. 60).

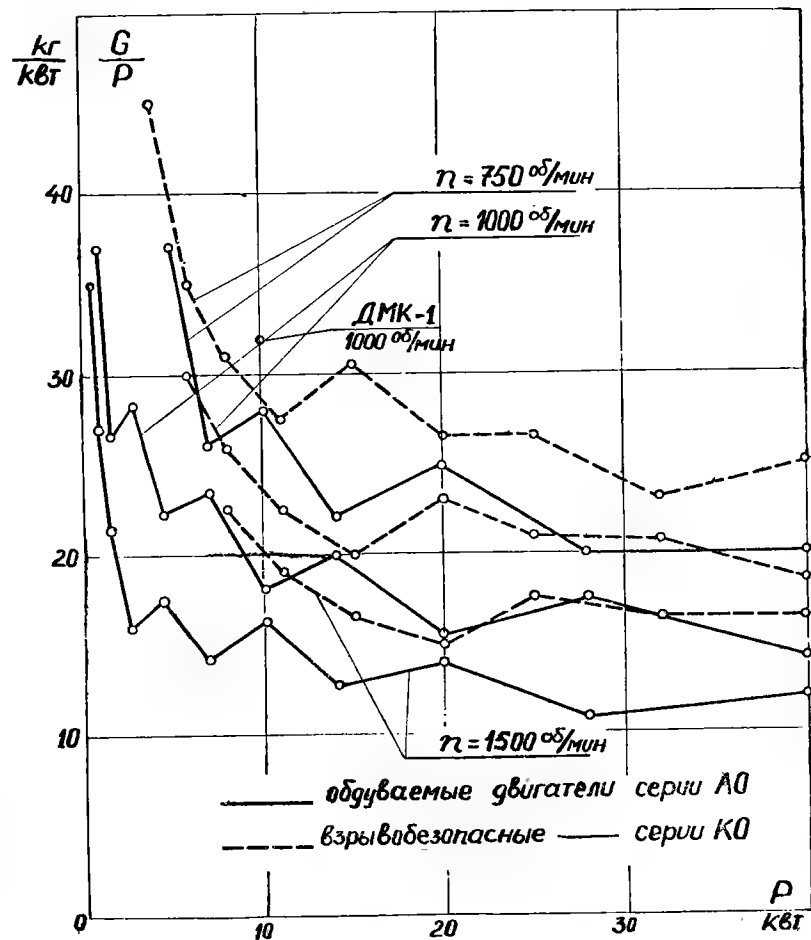


Рис. 59. Сравнение удельных весовых показателей закрытых обдуваемых асинхронных и синхронных двигателей.

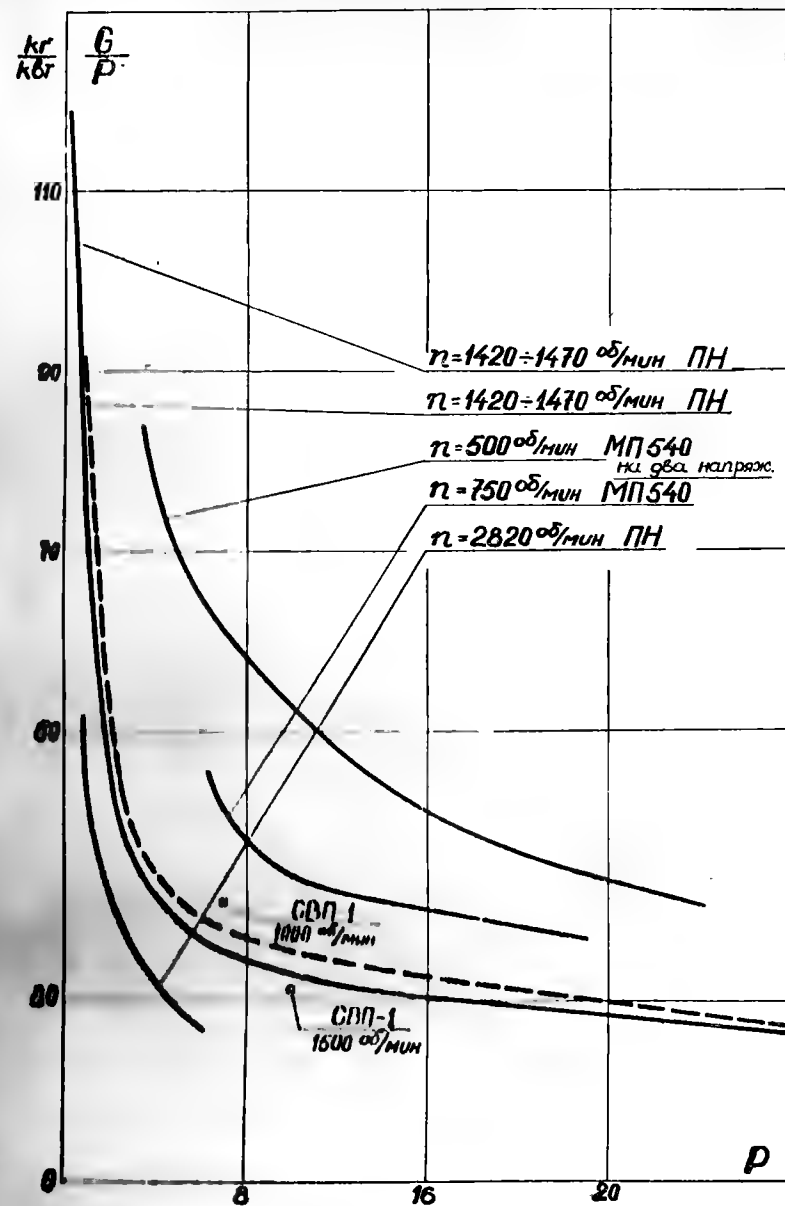


Рис. 60. Сравнение удельных весовых показателей различных коллекторных машин и бесконтактных генераторов постоянного тока.

Из приведенного обзора видно, что наблюдаемое в последние два десятилетия все ускоряющееся возрождение и дальнейшее развитие машин с когтеобразными полюсами неизменно оказывается связанным с эффективным разрешением ряда практических проблем. Применение когтеобразных полюсов позволило получить безотказно работающие бесконтактные сельсины, дало возможность построить простые и надежные генераторы с постоянными магнитами, предоставило автомобильной и железнодорожной технике простые, экономичные и надежные в эксплуатации генераторы для электрооборудования, дало серьезный толчок дальнейшему развитию и применению электромагнитных муфт скольжения, обеспечив их простое и эффективное конструктивное исполнение, позволило создать бесконтактные конструкции синхронных генераторов и двигателей, не уступающих по весовым показателям другим, более сложным и менее надежным конструкциям.

Развитие рассматриваемой конструкции продолжается, круг ее применения неуклонно расширяется, практическое значение с каждым годом возрастает, и в электромашиностроении ближайшего будущего синхронная машина с когтеобразными полюсами должна занять достойное место.

В этой связи недопустимым является почти полное отсутствие теоретических работ в области синхронных машин с когтеобразными полюсами. Литература по этим машинам вообще довольно скудна, а вопросы теории, кроме учебника А. А. Свириденко, М. А. Красношапки и В. А. Винокурова [26] и небольшой монографии В. С. Шарова по электромагнитным муфтам скольжения [47], вовсе нигде не рассматриваются. К тому же и в этих работах специфика когтеобразной конструкции рассматривается в недостаточном объеме. Поэтому разработка теории машин с когтеобразными полюсами и инженерной методики их расчета и проектирования является насущной проблемой. Решение этой проблемы может и должно привести к еще большим практическим успехам конструкций с полюсами когтеобразной формы.

ГЛАВА II

ОСОБЕННОСТИ СИНХРОННЫХ МАШИН С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Насколько можно судить по различным конструкциям машин с когтеобразными полюсами, их отличие от других синхронных машин состоит, по существу, лишь в своеобразии индукторной части (системы возбуждения). Такое отличие представляется на первый взгляд малосущественным и второстепенным. Однако более детальное рассмотрение показывает, что это не так. Конструктивные особенности когтеобразного индуктора приводят к весьма глубоким изменениям в общей картине рабочего процесса машины и порождают целый ряд таких характерных особенностей, которые почти не свойственны другим типам электрических машин.

Рассмотрению этих особенностей и посвящается настоящая глава.

1. НАЛИЧИЕ ПОЛНОГО ПОТОКА МАШИНЫ

Применение когтеобразных полюсов коренным образом изменяет магнитную цепь машины. Вместо обычного кратчайшего пути из полюса в полюс по отрезку ярма индуктора (например, по линии d_1d_1 — рис. 61) магнитный поток в машинах с когтеобразными полюсами проходит значительно более длинный и сложный путь.

Попавши из воздушного зазора в полюс, поток, следуя очертаниям когтеобразного полюса, получает *аксиально-радиальное направление* и отклоняется в сторону от средней плоскости пакета статора (например, по линиям c_1d_1 или d_2d_2 — рис. 62а). В результате, благодаря соответствующему перекрестному расположению полюсов северной и южной полнотности потока разноименных полюсов оказываются *разведенными в разные стороны*, так что все потоки, например северных полюсов, оказываются сконцентрированными с одной

стороны машины (на рис. 62а — слева), а все потоки южных полюсов — с другой ее стороны (справа). В связи с этим появляется возможность с помощью ферромагнитных колец K_N и K_S объединить потоки всех полюсов одной и той же полярности в общий поток, который можно назвать *полным потоком машины* (рис. 62б и 1).

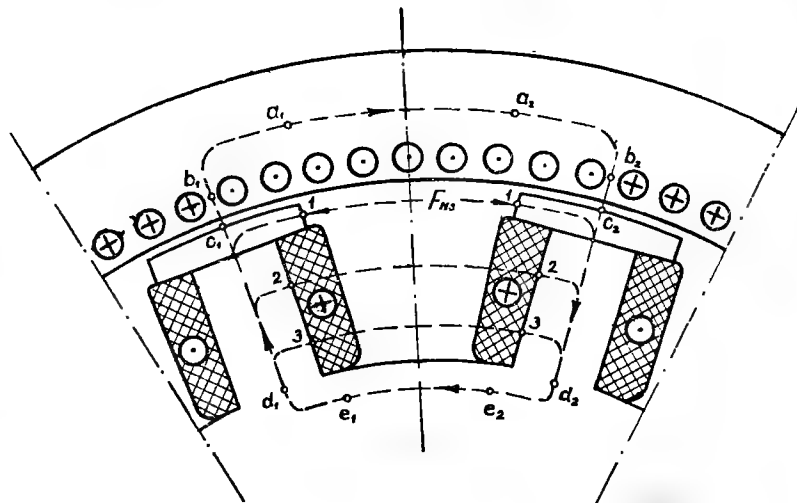


Рис. 61. Путь основного потока в обычных явнополюсных машинах.

Наличие единого полного потока машины позволяет упростить и облегчить обмотку возбуждения, которую, как видно из рис. 62 и 1, оказывается возможным выполнить в виде *одной, общей для всех полюсов, круглой катушки KB*. Эта катушка охватывает втулку В и возбуждает в ней непосредственно полный поток машины. В бесконтактной конструкции (рис. 63 и 2) вместо катушки KB устанавливаются две — K_{BN} и K_{BS} , которые вместо втулки В размещаются на кольцевых приливах щитов K_{PN} и K_{PS} . Однако эти отличия не вносят принципиальных изменений в компоновку магнитной цепи, и здесь, очевидно, также имеется полный поток машины.

Таким образом, в отличие от обычной явнополюсной и других подобных конструкций синхронных машин, где потоки отдельных полюсов, по существу, не связаны между собой и возбуждаются каждый своим источником м.д.с. (своей катушкой или парой соседних катушек), в синхронной машине с когтеобразными полюсами поток каждого полюса является

лишь частью общего физически существующего единого потока машины, возбуждаемого единым источником м.д.с. — общей для всех полюсов катушкой возбуждения. Иными словами, если, например, в нормальную явнополюсную машину потоки

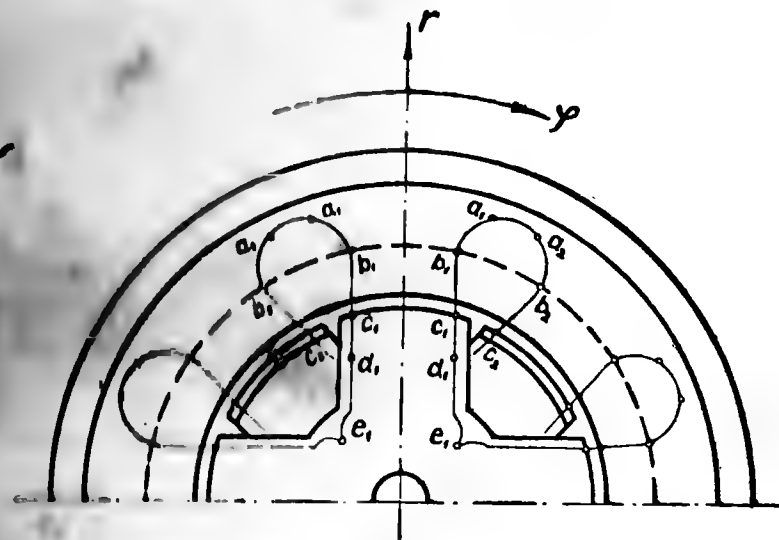
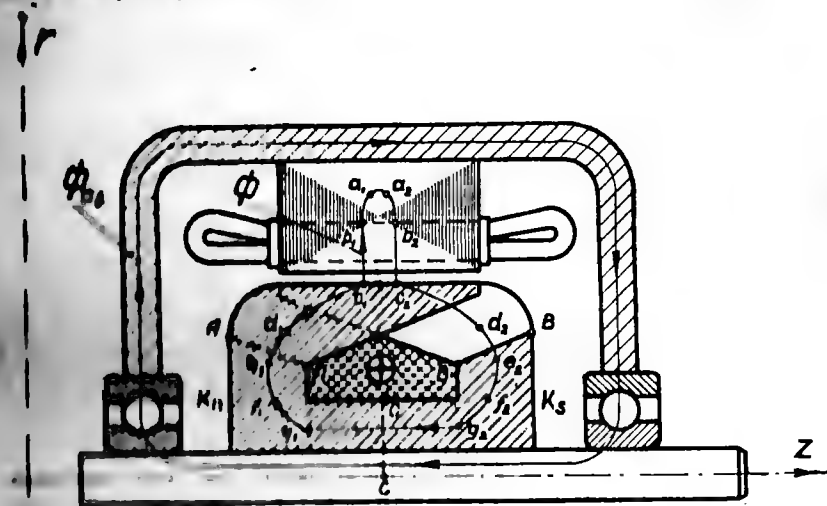


Рис. 62. Пути основного потока в машине с когтеобразными полюсами:

а — продольный разрез машины; б — поперечный разрез машины;
 Φ — основной (полезный) поток; $\Phi_{\text{ов}}$ — поток рассеяния через вал.

отдельных полюсов лишь сосуществуют друг с другом, то в когтеобразной конструкции они представляют собой единое семейство, имеющее общую основу в виде полного потока машины.

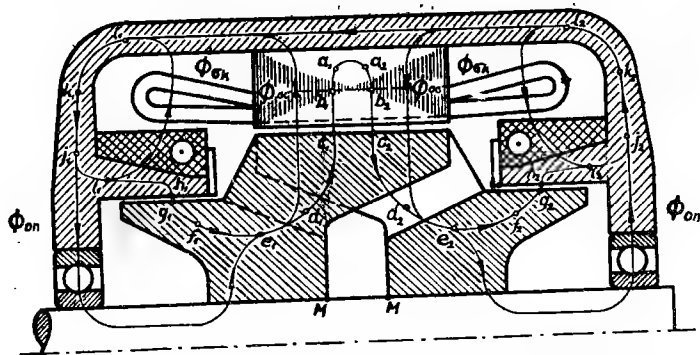


Рис. 63. Пути потока в бесконтактной конструкции машины с когтеобразными полюсами:

$\Phi_{ск}$ — поток рассеяния катушки возбуждения; $\Phi_{ос}$ — поток отведения из статора в ротор; $\Phi_{оп}$ — поток отведения через подшипники.

2. НАЛИЧИЕ АКСИАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ПУТЕЙ ПОТОКА

Образованный с помощью когтеобразных полюсов полный поток машины должен, как и всякий магнитный поток, замкнуть свой путь. Для этого необходимо его, очевидно, направить от южной полюсной системы к северной. Но поскольку эти полюсные системы расположены в противоположных сторонах машины, то соединяющий их магнитопровод неминуемо должен иметь аксиальное расположение. При этом, как уже указывалось во введении, возможны два варианта: либо полный поток передается от южной системы к северной по кратчайшему пути — центральной втулке ротора B (см. рис. 1 и 62а), или же эта передача осуществляется по более длинному внешнему пути вокруг всей машины (см. рис. 2 и 63). Нетрудно заметить, что в обоих случаях поток имеет на большей части своего пути *аксиальное (вдоль оси машины) направление*, и этот факт является одной из особенностей когтеобразной конструкции.

Эта особенность оказывает весьма серьезное влияние на параметры синхронной машины с когтеобразными полюсами. Во-первых, ввиду наличия аксиально расположенных участков, длина пути потока в роторе, а следовательно и соответствующий

м.д.с., получаются большими, чем, например, у явнополюсного ротора (см. рис. 61), где аксиальные пути отсутствуют. Во-вторых, поперечные сечения аксиально расположенных участков, таких, как сами когтеобразные полюса, втулка ротора (см. рис. 1) и цилиндры ротора (см. рис. 2), оказываются не зависящими от длины пакета статора и целиком определяются радиальными размерами ротора и условиями размещения на нем полюсов, катушки возбуждения и других элементов. Поэтому в машине с когтеобразными полюсами увеличение потока машины путем удлинения пакета статора может производиться лишь до известного предела, дальше которого оно становится невозможным ввиду насыщения аксиальных путей магнитной цепи ротора и вследствие невозможности увеличения сечения этих путей. В связи с этим машина с когтеобразными полюсами оказывается целесообразным применять только с относительно малой длиной пакета статора.

Следует отметить, что аксиальное расположение некоторой части путей потока и связанные с этим ограничения продольных размеров машины имеют место и в некоторых других конструкциях — в униполярных машинах постоянного тока и в одноименнополюсных (т. е. также униполярных) индукторных машинах переменного тока. У этих машин есть также и другие черты сходства с рассматриваемыми машинами с когтеобразными полюсами, в частности, например, наличие только одной (или двух) катушек возбуждения.

Учитывая это, представляется целесообразным выделить перечисленные три конструкции (с когтеобразными полюсами, униполярную и одноименнополюсную индукторную) в особый класс электрических машин, отличающихся наличием аксиальных путей магнитного потока. Можно также присвоить этому классу специальное наименование, например *машины с аксиальным потоком*, или, короче, *аксиальные машины*.

6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ХАРАКТЕР МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Наличие аксиально расположенных путей потока (рис. 62а) при одновременном сохранении обычных радиальных и дугообразных путей его в статоре (рис. 62б) свидетельствует о *неравномерном, пространственном характере магнитного поля в машинах с когтеобразными полюсами*. Действительно, если отнести рассматриваемую машину, например, к цилиндрической системе координат r, φ, z (см. рис. 62а и б), расположив ось z так, чтобы она совпала с осью машины, то легко заметить, что направление магнитного потока имеет составляющие

по всем трем координатам. Так, во втулке ротора вектор индукции имеет в основном составляющую по оси z . Однако ближе к торцам втулки, где начинается переход потока в кольца K_N и K_S , поток поворачивается и появляется радиальная составляющая индукции по оси r . Далее, по мере продвижения из кольца к полюсу, наблюдается уплотнение потока вокруг входного сечения полюса, в результате чего поле теряет свой чисто цилиндрический (т. е. симметричный по всей окружности) характер и приобретает циклично-секториальное строение, так что каждому полюсу соответствует свой сектор, свой цикл симметрии (см. рис. 62б). При этом в связи с указанным уплотнением потока, происходящим, как нетрудно заметить, в тангенциальных направлениях, появляется составляющая индукции по оси φ . При продвижении потока по полюсу составляющая по оси φ постепенно уменьшается, однако не исчезает полностью ввиду наличия потока рассеяния между боковыми поверхностями соседних полюсов разной полярности, направленного, как видно из рис. 61, главным образом по оси φ . При переходе из полюса в зазор и затем в зубцовый слой статора составляющие индукции по осям φ и z практически полностью исчезают, и поток имеет, как и в обычных машинах, чисто радиальное направление. Затем, переходя из зубца в спинку статора, вектор индукции вновь приобретает тангенциальную составляющую по оси φ , а радиальная составляющая по оси r при этом убывает и становится равной нулю в средней точке пути потока по спинке.

Из приведенного описания путей потока видно, что в таких местах магнитной цепи, как когтеобразные полюса и их сборные кольца, вектор магнитной индукции имеет составляющие одновременно по всем трем координатным осям, и следовательно, магнитное поле в этих частях цепи не может быть изображено на плоскости и имеет *пространственный характер*.

В других частях цепи, таких как воздушный зазор, зубцы и спинка статора, поле в первом приближении может считаться плоским, однако ввиду несимметрии когтеобразного полюса поле в статоре, вообще говоря, изменяется от листа к листу и не является, таким образом, плоскопараллельным. Наконец, в таких частях цепи, как втулка ротора (см. рис. 62а) или все внешнее «ядро» в машине с внешнезамкнутым магнитным потоком (см. рис. 63), поле обладает круговой симметрией и не зависит от координаты φ . Однако и в этом случае, несмотря на зависимость только от двух координат, поле не является плоским, так как располагается в цилиндрическом пространстве.

Таким образом, в машинах с когтеобразными полюсами магнитное поле не имеет того сравнительно простого плоско-

параллельного характера, который обычно имеет место в явнополюсной и других конструкциях синхронных машин, а наоборот, является пространственным.

4. СЛОЖНОСТЬ КАРТИНЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Помимо пространственного (неплоского) характера магнитного поля синхронной машины с когтеобразными полюсами, следует отметить также его весьма сложное строение. Причиной этого является большое число поворотов пути магнитного потока. Так, выходя, например, из втулки ротора (см. рис. 62а), поток на пути к кольцу K_N должен сменить аксиальное направление на радиальное, в связи с чем его путь в этом месте проходит по дуге g_1f_1 , совершающей плавный поворот потока на 90° . Далее, оказавшись в кольце K_N , поток должен распределиться по отдельным полюсам, в связи с чем большинство силовых линий испытывает более или менее резкие повороты в тангенциальных направлениях (по линиям e_1d_1 — рис. 62б). Переходя затем в полюс, поток получает наклонное аксиально-радиальное направление, что оказывается связанным с предварительным поворотом по дуге e_1d_1 (рис. 62а). Наконец, при выходе из полюса в воздушный зазор поток, имея наклонное направление к поверхности раздела, резко преломляется в точке c_1 и выходит из полюса практически нормально к его поверхности (линия c_1b_1). Дальнейший путь потока проходит так же, как и в обычных машинах: радиально — через зазор и зубцы статора (c_1b_1) с поворотом на 90° по дуге b_1a_1 (см. рис. 62б), через спинку статора по пути a_1a_2 , затем снова с поворотом на 90° по дуге a_2b_2 и снова по радиусу через зубцы и зазор (b_2c_2) — к поверхности южного полюса. Здесь поток вновь преломляется и направляется к втулке ротора по пути $c_2d_2e_2f_2g_2$, который отличается от описанного выше $g_1f_1e_1d_1c_1$ только обратной последовательностью прохождения отдельных участков и поворотов.

На основании изложенного нетрудно заключить, что если, например, в обычных явнополюсных машинах магнитный поток по своему пути имеет лишь четыре поворота (два в спинке статора и два в ядре ротора) и происходят они в одной поперечной плоскости (см. рис. 61), то в машинах с когтеобразными полюсами имеют место в общей сложности 10 поворотов и происходят они в различных плоскостях и направлениях.

Кроме большего количества поворотов пути потока имеется в машинах без скользящих контактов (см. рис. 2). В этой машине, помимо указанных выше, имеют место дополнительно

еще восемь поворотов (см. рис. 63): на пути потока в подшипниковых щитах (дуги l_1k_1 и k_2l_2), при переходе из щитов в кольцеобразные выступы (j_1i_1 и i_2j_2), преломление потока на поверхности кольцеобразного выступа (в точках h_1 и h_2) и обратное преломление на поверхности цилиндра (в точках g_1 и g_2). Всего, таким образом, в бесконтактной конструкции имеется 18 поворотов и преломлений пути потока.

Поскольку каждый поворот пути потока связан, как известно, со значительной неравномерностью поля вблизи этого поворота, то учитывая, помимо того, пространственный характер поля, нетрудно прийти к выводу о том, что общая картина магнитного поля в машинах с когтеобразными полюсами весьма сложна. Это обстоятельство значительно усложняет исследования и расчеты таких машин и требует использования для этой цели более эффективных методов, нежели те, которые обычно применяются при исследованиях магнитных полей электрических машин. Нетрудно понять в связи с этим, что отыскание упомянутых эффективных методов и их приложение к конкретным условиям машин с когтеобразными полюсами составляют, по существу, главную задачу всей теории такого рода машин.

5. СПЕЦИФИКА ПОТОКОВ РАССЕЯНИЯ

Весьма серьезной особенностью синхронных машин с когтеобразными полюсами является специфика потоков рассеяния и их повышенное значение. Причиной этого является в основном то обстоятельство, что обмотка возбуждения в машинах с когтеобразными полюсами располагается на известном расстоянии от активных (т. е. обращенных к статору) поверхностей полюсов, благодаря чему на пути от статора до катушки возбуждения образуются значительные пространства, занимаемые потоком рассеяния. К таким пространствам в первую очередь относятся промежутки между соседними полюсами противоположной полярности. Каждый такой промежуток ограничен, как нетрудно заметить, двумя ферромагнитными поверхностями (боковыми поверхностями полюсов), разность магнитных потенциалов между которыми близ статора равна тому значению междуполюсной м.д.с. F_{NS} , которое необходимо для поддержания заданного режима работы машины. По мере удаления от статора м.д.с. между боковыми поверхностями полюсов несколько возрастает за счет прибавления к междуполюсной м.д.с. F_{NS} падения магнитного напряжения в теле полюса F_p (рис. 64).

Таким образом, в машинах с когтеобразными полюсами

потоки междуполюсного рассеяния образуются между значительными поверхностями полюсов и при значительной разности магнитных потенциалов между ними. Иная картина имеет место, например, в обычных явнополюсных машинах (см. рис. 61). В этой конструкции обмотка возбуждения располагается в непосредственной близости от статора, отделяясь

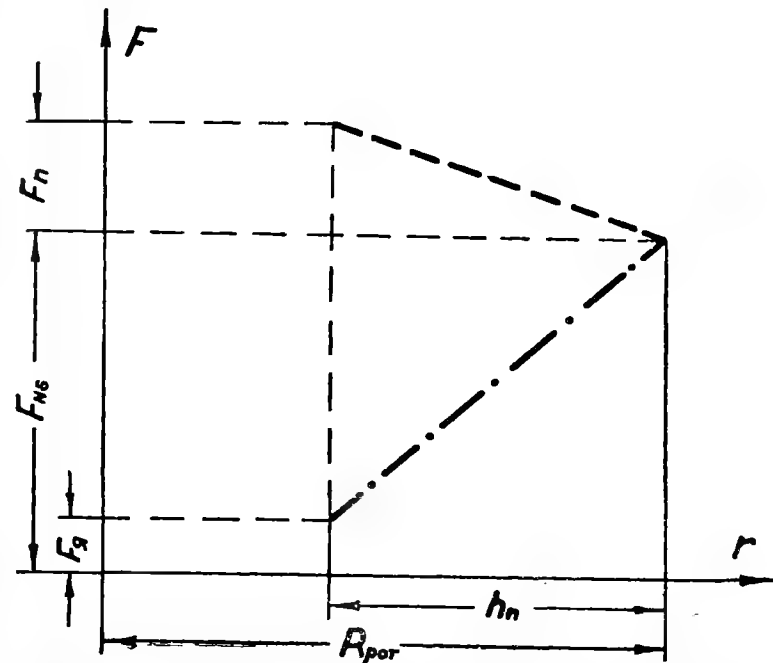


Рис. 64. К выяснению специфики потоков рассеяния в машинах с когтеобразными полюсами:

F_{NS} — междуполюсная м. д. с.; F_p — м. д. с. полюса; F_q — м. д. с. ярма; h_p — высота полюса (по радиусу); R_{rot} — радиус ротора.

от него лишь воздушным зазором и полюсным наконечником. Поэтому полное значение междуполюсной м.д.с. F_{NS} здесь имеет место только между сравнительно небольшими по толщине полюсными наконечниками, а далее — по мере удаления от них м.д.с. между полюсными сердечниками (т. е. между ярмами 2—2, 3—3 и т. п. — рис. 61) постепенно уменьшается за счет включения части витков обмотки возбуждения и у основания полюса становится весьма малой величиной, равной м.д.с. ярма ротора (рис. 64). В связи с этим поток междуполюсного рассеяния при обычных явновыраженных полюсах с катушками на каждом полюсе оказывается при прочих равных

условиях значительно меньшим, чем при когтеобразных полюсах. Это является серьезным недостатком машин с когтеобразными полюсами и должно тщательно учитываться во всех расчетах.

В целях некоторого упрощения исследований и расчетов целесообразно общий поток междуполюсного рассеяния разделить на несколько составляющих, соответствующих отдельным участкам поверхности полюса (рис. 65):

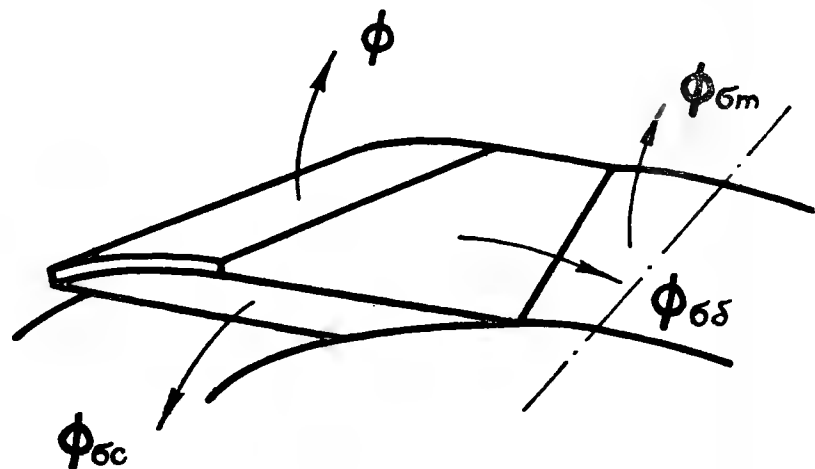


Рис. 65. Составляющие междуполюсного рассеяния когтеобразных полюсов:

$\Phi_{об}$ — через боковую поверхность полюса; $\Phi_{вс}$ — через внутреннюю скошенную поверхность полюса; $\Phi_{от}$ — через поверхность между двумя полюсами одинаковой полярности; Φ — полезный поток.

- 1) поток рассеяния через боковую поверхность полюса ($\Phi_{об}$);
- 2) поток рассеяния через внутреннюю скошенную поверхность полюса ($\Phi_{вс}$);
- 3) поток рассеяния через коническую поверхность, расположенную между двумя соседними полюсами одной и той же полярности (Φ).

Если полезный поток полюса (т. е. поток, входящий из данного полюса в якорь машины) обозначить через Φ , то тогда для потока в основании полюса, т. е. в месте его перехода в сборное кольцо или цилиндр (в сечении АА на рис. 62а),

$$\Phi_n = \Phi + 2\Phi_{об} + \Phi_{вс}, \quad (II-1)$$

а для потока в сборном кольце (в сечении ВВ)

$$\Phi_k = p\Phi_n + p\Phi_{от} = p(\Phi + 2\Phi_{об} + \Phi_{вс} + \Phi_{от}). \quad (II-2)$$

Кроме потоков междуполюсного рассеяния, в индукторной части машины с когтеобразными полюсами могут иметь место еще и другие потоки рассеяния. Так, если щиты и станина машины на рис. 62а выполнены из ферромагнитного материала, то возникает внешний поток рассеяния $\Phi_{св}$, проходящий сквозь подшипниковые узлы и замыкающийся через вал и центральную втулку ротора.

Ввиду наличия потока $\Phi_{св}$, поток в центральной втулке (в сечении СС) оказывается равным:

$$\Phi_{ц} = \Phi_k + \Phi_{св}. \quad (II-3)$$

В бесконтактной конструкции поток, замыкающийся по внешней магнитной цепи, является полезным. Однако поток рассеяния через вал $\Phi_{св}$ в таких машинах тоже имеет место, но проходит он не по выступающим концам вала, а по его центральному отрезку ММ, заключенному между полюсными системами (см. рис. 63). Поэтому формула (II-3), как нетрудно убедиться из рис. 63, остается в силе и для этого случая, с той лишь разницей, что под $\Phi_{св}$ понимается не внешний поток, а поток рассеяния через вал, а под $\Phi_{ц}$ — полный поток в цилиндре ротора.

Бесконтактная конструкция, изображенная на рис. 63, помимо изложенного, отличается еще той особенностью, что катушки возбуждения здесь максимально удалены от полюсов и размещаются в отдельных пространствах внутри подшипниковых щитов. В связи с этим вокруг катушек возбуждения возникают отдельные потоки рассеяния $\Phi_{ск}$, которые дополняют основной поток и щите $\Phi_{щ}$ необходимо учитывать наличие этих потоков и катушек и положить

$$\Phi_{щ} = \Phi_{щ} + \Phi_{ск}. \quad (II-4)$$

Наконец, еще одна особенность бесконтактной конструкции, изображенной на рис. 63, состоит в наличии потоков рассеяния, разгружающих основную магнитную цепь. Так, поток, поступающий из подшипникового щита в станину, имеет возможность замкнуться не только по рассмотренному ранее основному пути, пролегающему вдоль станины, но и выбрать себе более короткий путь непосредственно через лавку статора (потоки $\Phi_{ос}$ — рис. 63). Подробные исследования, описанные в III главе, показывают, что такие потоки действительно имеют место и заметно разгружают в магнитном отношении среднюю часть станины статора.

Вторым местом образования потоков ответвления в бесконтактной машине являются подшипниковые узлы. Проходящие через эти узлы потоки $\Phi_{оп}$ (рис. 63), как нетрудно заметить, оказываются параллельными по отношению к участку цилиндр — дополнительный зазор — кольцеобразный выступ щита и, следовательно, разгружают этот участок. Поэтому для потока в дополнительном зазоре Φ_{Δ} имеет место равенство

$$\Phi_{\Delta} = \Phi_{ц} - \Phi_{оп}, \quad (II-5)$$

а для вычисления потока в кольцеобразном выступе $\Phi_{в}$ необходимо учесть еще поток рассеяния катушки возбуждения (см. рис. 63)

$$\Phi_{в} = \Phi_{\Delta} + \Phi_{ск} = \Phi_{ц} - \Phi_{оп} + \Phi_{ск}. \quad (II-6)$$

Таким образом, если в конструкции с вращающейся обмоткой (см. рис. 62а) поток через подшипниковые узлы играл роль потока рассеяния, дополнительно загружая втулку ротора, то в бесконтактной машине с когтеобразными полюсами (см. рис. 63) он играет положительную роль, разгружая некоторые участки магнитной цепи. Однако отрицательным в обоих случаях является тот факт, что рассматриваемый поток проходит через подшипник. Это, как известно, при работе машины может быть причиной появления паразитных токов и других нежелательных явлений в подшипнике, которые, в свою очередь, могут вызвать его ускоренный износ. Поэтому в ряде случаев, особенно в машинах достаточно большой мощности, может оказаться целесообразным изолировать в магнитном отношении подшипники от остальной магнитной цепи или же применить вал из немагнитной стали.

6. СВОЕОБРАЗИЕ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ, ИЗБРАЖАЮЩИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КОГТЕОБРАЗНЫХ ПОЛЮСОВ

Весьма своеобразная особенность машин с когтеобразными полюсами обнаруживается при попытках изобразить магнитное поле в таких машинах с помощью силовых линий. Пусть, например, необходимо построить картину силовых линий для полюсов, изображенных на рис. 66. Целесообразно для простоты вначале пренебречь явлением междуполюсного рассеяния и считать, что весь поток, вошедший в полюс из втулки ротора, должен выйти из активной поверхности полюса, пройдя по статору, вступить в полюс противоположной полярности и вернуться обратно во втулку. При таком условии ни одна силовая линия не может пересечь боковых поверхностей

полюсов и наружной поверхности втулки; поэтому на всех этих поверхностях вектор магнитной индукции $\vec{B}$ находится касательно к ним и, следовательно, сами поверхности можно представить состоящими из бесчисленного множества прилегающих друг к другу силовых линий. Пусть две такие близко лежащие линии попадают из статора в южный полюс в точках M и N (рис. 66), находящихся на остром крае полюса между его углом B и средней точкой A , и направляются к основанию полюса по его скошенной боковой поверхности. Достигнув поверхности втулки ротора в точках M' и N' , рас-

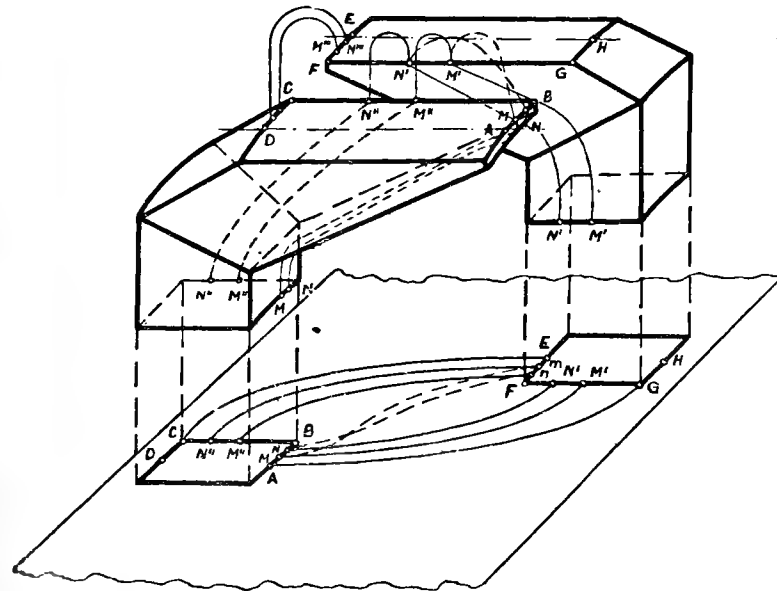


Рис. 66. К пояснению своеобразия силовых линий в машинах с когтеобразными полюсами.

считываемые линии ввиду отсутствия рассеяния должны перейти на эту поверхность и направиться по ней к северному полюсу. При этом, как видно из рисунка, рассматриваемые силовые линии не могут подойти к северному полюсу в точках n и m , расположенных симметрично точкам M и N их выхода из южного полюса, ибо для этого потребовалось бы пересекать другие силовые линии (пунктир), что, как известно, принципиально невозможно. Поэтому рассматриваемые силовые линии вынуждены достичь северного полюса в некоторых точках N' и M' , расположенных на боковой поверхности полюса, а

затем подняться по этой поверхности до точек N' и M' на активной поверхности полюса. Отсюда линии попадают в зазор и затем в статор и, пройдя его, должны были бы вернуться обратно в исходные точки M и N . Однако, как видно из рис. 66, пути $M'M$ и $N'N$ должны при этом неминуемо перекрыть друг друга, образовав некоторую винтовую поверхность. Такое положение невозможно, ибо ввиду расслоенности пакета статора все силовые линии должны располагаться в плоскости листов пакета и не могут взаимно перекрещиваться. Поэтому вместо путей $M'M$ и $N'N$ рассматриваемые линии должны направиться по путям $N'N''$ и $M'M''$, а затем вновь спуститься к поверхности втулки ротора в точках M'' и N'' , перейти обратно на северный полюс, перейти в южный полюс и т. д., так что не представляется возможным установить, когда эти линии вернутся в свои исходные точки M и N .

Таким образом, приходится сделать вывод, что в машинах с когтеобразными полюсами силовые линии не обязательно должны замыкаться после одного обхода вокруг катушки возбуждения, а могут перед этим совершить несколько обходов, пройдя по различным частям магнитной цепи ротора и статора. Развивая это положение дальше, можно допустить, что поскольку нельзя установить количество указанных обходов, то оно, по-видимому, может быть и неограниченно большим. В этом случае вся совокупность силовых линий в машине представляет собой, по существу, лишь одну и ту же силовую линию, бесконечное число раз сцепляющуюся с катушкой возбуждения и заполняющую при этом постепенно все пространство, занятое магнитной цепью машины. Этот вывод, очевидно, не изменится и в том случае, если будет иметь место междуполюсное рассеяние, так как, будучи второстепенным явлением, оно не может существенно изменить главного. Справедлив этот вывод будет также и для бесконтактной конструкции, изображенной на рис. 63, ибо главная причина многообходности линий — несимметрия когтеобразных полюсов — имеет место и в этом случае, а все отличие этой конструкции сводится, в сущности, лишь к тому, что «ярмо» магнитной цепи находится снаружи машины, а не внутри. Вместе с тем необходимо отметить, что в этой машине многообходными являются не все линии, а лишь те, которые проходят через полюса и при этом сцепляются с обеими катушками возбуждения. Те линии, которые через полюса не проходят (например, линии потока рассеяния через вал $\Phi_{св}$) или сцепляются только с одной катушкой возбуждения (линии потока ответвления через пакет статора $\Phi_{ос}$ и линии потока рассеяния обмотки возбуждения $\Phi_{ж}$), являются, как нетрудно

видеть, плоскими (или почти плоскими) кривыми и поэтому должны быть однообходными.

Возвращаясь к факту многообходности силовых линий, следует заметить, что в литературе известен [60], особый класс силовых линий, не имеющих ни начала, ни конца и плотно заполняющих собою некоторую поверхность. Силовые линии в машинах с когтеобразными полюсами, очевидно, также относятся к этому классу, однако с тем существенным отличием, что источником таких линий является не сочетание двух или нескольких токов [60], а своеобразная форма магнитной цепи и что эти линии заполняют собою не поверхность и не группу поверхностей, а некоторый объем в целом.

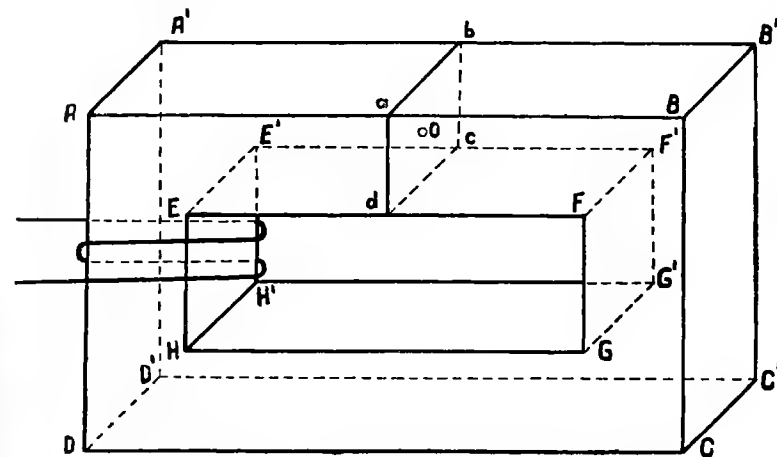


Рис. 67. Магнитопровод квадратного сечения.

Можно показать, что это свойство силовых линий не является следствием каких-либо особых свойств машин с когтеобразными полюсами, а присуще вообще многим неплоским магнитным цепям. В качестве примера можно рассмотреть простейший магнитопровод квадратного сечения, выполненный из материала с весьма высокой магнитной проницаемостью (рис. 67). Поле в таком магнитопроводе является, как известно, плоскопараллельным, а силовые линии — однообходными. Длинные ребра этого магнитопровода (такие, как AB , EF , BC , FG и т. д.) на всем своем протяжении, очевидно, совпадают с силовыми линиями, а комбинация четырех таких ребер (например, $ABCD$, $EFGH$ и т. д.) представляет собой одну замкнутую силовую линию.

Если теперь разрезать магнитопровод по сечению $abcd$

(рис. 67) и, развернув торцы разреза на 45° в разные стороны, снова соединить их так, как показано на рис. 68, то это, очевидно, никак не может повлиять на свойство ребер совпадать с силовыми линиями, и поэтому движение по ребрам магнитопровода (рис. 68) по-прежнему будет означать обход по силовой линии. Однако, отправляясь, например, из точки A и следуя по встречающимся длинным ребрам, силовая линия, прежде чем вернуться в исходную точку, должна будет теперь пройти путь $AaFGHEdF'G'H'E'cB'C'D'A'bBCDA$, сделав при этом не один, как на рис. 67, а четыре обхода вокруг магнитопровода.

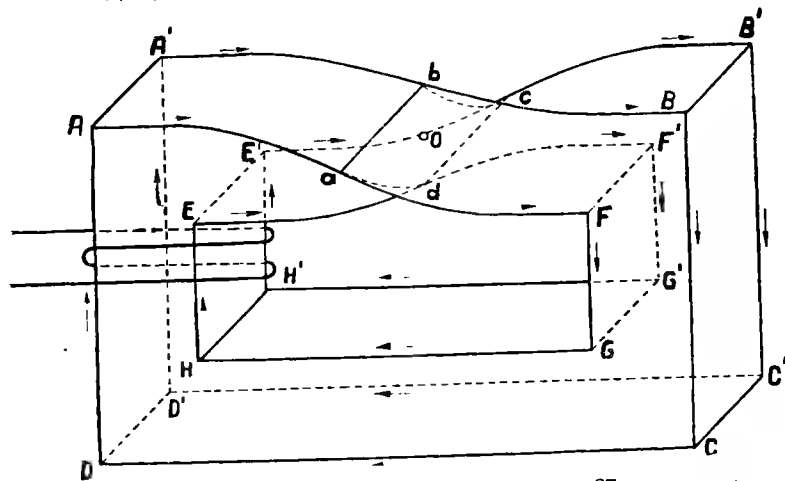


Рис. 68. Преобразованный магнитопровод рис. 67 с четырех-обходными силовыми линиями.

провода. По-видимому, нет оснований не предполагать, что и остальные силовые линии, которые не совпадают с ребрами сердечника, также являются четырехобходными. Единственной линией, к которой этот вывод не относится, — центральная силовая линия, проходящая через центр O сечения $abcd$. Эта линия ввиду своего симметричного расположения относительно граней магнитопровода должна, по-видимому, остаться однообходной.

Приведенный пример показывает, как путем небольшого преобразования простого магнитопровода можно получить вместо плоско-параллельного поля пространственное и одновременно с этим — вместо однообходных линий многообходные. Варьируя форму поперечного сечения и угол разворота разрезанных концов магнитопровода и изменяя количество разрезов, можно уже на приведенном простейшем типе магнитной цепи привести много примеров возникновения многообходных сило-

вых линий. Если же варьировать и саму форму магнитной цепи, то количество таких примеров можно увеличивать неограниченно. Отсюда можно сделать общий вывод о том, что магнитные силовые линии с многократным обходом или с бесконечно большим количеством обходов вокруг создающего их тела составляют наиболее общий класс силовых линий, а обычные, чаще всего встречающиеся в практических задачах однообходные линии являются лишь частным случаем, обусловленным простотой картины поля или его плоским характером.

Необходимо, однако, заметить, что все изложенное относительно многообходных линий, так же как и вообще само понятие о силовых линиях, имеет значение, в основном, лишь для приближенного графического изображения поля. Что же касается различных методов аналитического расчета магнитного поля, то их правильность и применимость, очевидно, не зависит от того, какими свойствами обладают в данном поле силовые линии. В связи с этим в дальнейшем изложении факт многообходности силовых линий в машинах с когтеобразными полюсами может вовсе не приниматься во внимание.

7. ВЫСОКИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ОБМОТКИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Наличие полного потока в машинах с когтеобразными полюсами, как уже указывалось, дает возможность выполнить обмотку возбуждения в виде одной-двух катушек круглой формы, охватывающих непосредственно полный поток машины. В связи с этим в когтеобразной конструкции по сравнению с другими машинами получается значительно более выгодное соотношение между общим объемом (весом) провода обмотки возбуждения и величиной охватываемого этой обмоткой магнитного потока. Это, в свою очередь, приводит к значительной экономии как проводникового материала (меди), так и электроэнергии, необходимой для питания обмотки возбуждения.

Представляет интерес провести сравнение экономических показателей обмоток возбуждения двух одинаковых синхронных машин, отличающихся друг от друга только тем, что в одной из них ротор имеет обычную явнополюсную конструкцию, а в другой — когтеобразную. Обратив при этом внимание на то, что охватываемые обмотками сечения магнитопровода имеют в первом случае (при обычном явнополюсном роторе) вид прямоугольников со сторонами a и b , а во втором случае (при когтеобразном роторе) — вид круга радиуса R (рис. 69), для общего объема провода обмотки будем иметь

при явнополюсном роторе (индекс «я»):

$$V_{\text{я}} = [2(a + b) + 2\pi c_{\text{я}}] \cdot p w_{\text{я}} q_{\text{я}}, \quad (\text{II-7a})$$

при когтеобразном роторе (индекс «к»):

$$V_{\text{к}} = 2\pi(R + c_{\text{к}}) w_{\text{к}} q_{\text{к}}, \quad (\text{II-7b})$$

где $c_{\text{я}}, c_{\text{к}}$ — половина толщины сечения катушки,

$w_{\text{я}}, w_{\text{к}}$ — число витков на пару полюсов,

p — число пар полюсов,

$q_{\text{я}}, q_{\text{к}}$ — сечение провода катушки.

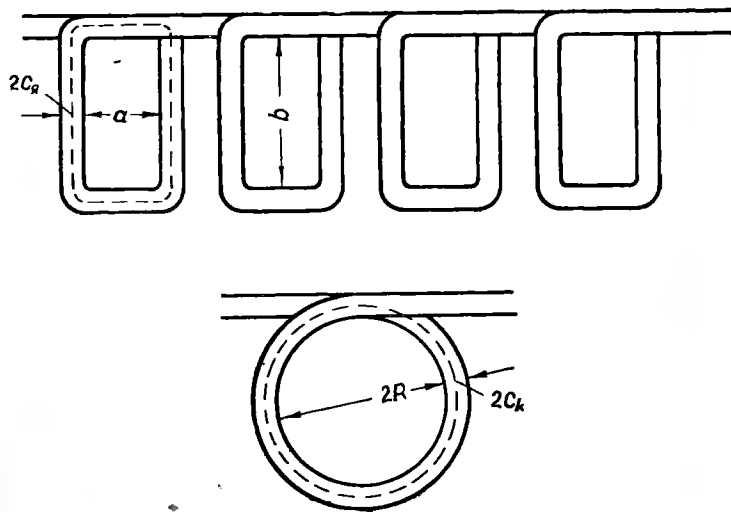


Рис. 69. К сравнению объема меди обмоток возбуждения в обычной явнополюсной конструкции и в конструкции с когтеобразными полюсами:

a — ширина катушки; b — длина катушки; $c_{\text{я}}$ и $c_{\text{к}}$ — половина толщины катушек; R — радиус катушки.

Далее, для сечения магнитопровода можно написать:

$$\text{при явнополюсном роторе } S_{\text{я}} = a \cdot b = \frac{\Phi}{B}, \quad (\text{II-8a})$$

$$\text{при когтеобразном роторе } S_{\text{к}} = \pi R^2 = \frac{p\Phi}{B}, \quad (\text{II-8b})$$

где Φ — поток полюса, а B — индукция в магнитопроводе. Согласно условиям сравнения, величины Φ и B следует,

очевидно, полагать равными в обеих машинах. Учитывая это обстоятельство, из равенств (II-8) будем иметь:

$$R = \sqrt{\frac{pab}{\pi}}. \quad (\text{II-9})$$

Поэтому, вычисляя отношение объемов $V_{\text{я}}$ к $V_{\text{к}}$ согласно выражениям (II-7) и (II-9) найдем:

$$\frac{V_{\text{я}}}{V_{\text{к}}} = \frac{a + b + \pi c_{\text{я}}}{\sqrt{\pi pab} + \pi c_{\text{к}}} \cdot p \cdot \frac{w_{\text{я}} q_{\text{я}}}{w_{\text{к}} q_{\text{к}}}. \quad (\text{II-10})$$

Выносим из числителя множитель $(a + b)$, а из знаменателя $\sqrt{\pi pab}$ и вводи обозначения

$$k = \frac{w_{\text{я}} q_{\text{я}}}{w_{\text{к}} q_{\text{к}}}, \quad (\text{II-11})$$

$$x = \frac{a + b}{2\sqrt{ab}} = \frac{1 + x}{2\sqrt{x}}; \quad \left(x = \frac{a}{b}\right), \quad (\text{II-12})$$

$$c_{\text{я}} = \frac{1 + \frac{\pi c_{\text{я}}}{a + b}}{1 + \frac{\pi c_{\text{к}}}{\sqrt{\pi pab}}} = \frac{1 + \frac{\pi c_{\text{я}}}{a + b}}{1 + \frac{c_{\text{к}}}{R}}, \quad (\text{II-13})$$

равенство (II-7) можно привести к следующему виду:

$$\frac{V_{\text{я}}}{V_{\text{к}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot k c_{\text{к}} \cdot \sqrt{p}. \quad (\text{II-14})$$

Для исходной к эту формулу величины k вместо выражения (II-11) можно написать:

$$k = \frac{I_{\text{я}} w_{\text{я}}}{I_{\text{к}} w_{\text{к}}} \cdot \frac{b_{\text{к}}}{b_{\text{я}}}, \quad (\text{II-15})$$

где

$I_{\text{я}}, I_{\text{к}}$ — ток возбуждения в номинальном режиме работы,

$b_{\text{я}}, b_{\text{к}}$ — плотность тока в обмотке возбуждения.

Так как, согласно условиям сравнения, электромагнитные нагрузки и основные размеры обеих машин одинаковы, то можно положить

$$\left. \begin{aligned} b_{\text{я}} &= b_{\text{к}} \\ I_{\text{я}} w_{\text{я}} &= F_{\text{я}} \approx F_{\text{к}} = I_{\text{к}} w_{\text{к}} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II-16})$$

где $F_{\text{я}}$ и $F_{\text{к}}$ — м. д. с. на пару полюсов, приблизительно одинаковая для обеих машин¹.

¹ Некоторая разница между $F_{\text{я}}$ и $F_{\text{к}}$ может иметь место за счет различия м. д. с. ротора (полюсов и ярма), которая обычно несколько больше в машинах с когтеобразными полюсами.

Подставляя соотношения (II-16) в формулу (II-15), получим:

$$k \approx 1. \quad (\text{II-17})$$

Оценивая далее входящий в формулу (II-14) коэффициент k , нетрудно заметить, что, согласно выражению (II-12), величина k при любых положительных значениях отношения сторон прямоугольника $x = \frac{a}{b}$ не может быть меньше единицы (рис. 70):

$$k \geq 1. \quad (\text{II-18})$$

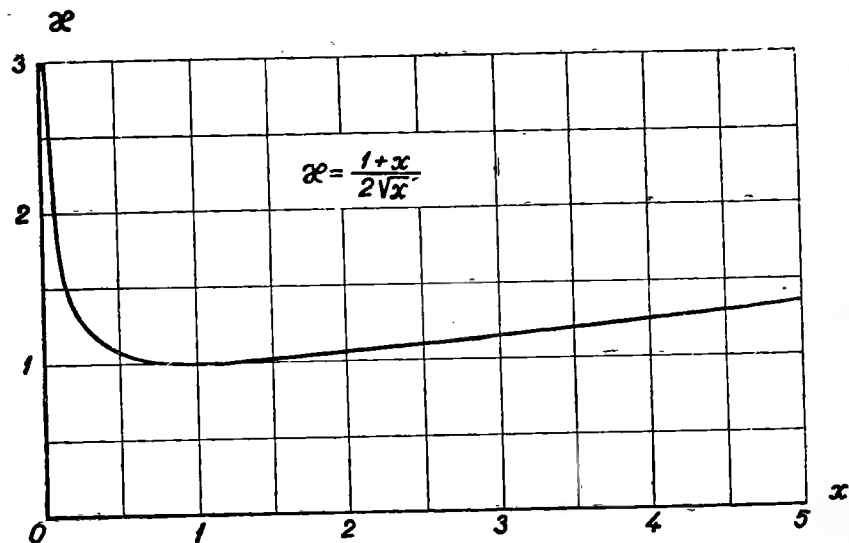


Рис. 70. Зависимость коэффициента k от параметра x .

Что же касается величины c в формуле (II-14), то поскольку определяющие ее отношения $\frac{\pi c_a}{a+b}$ и $\frac{c_k}{R}$, входящие в выражение (II-13), в практически применяемых конструкциях обычно значительно меньше единицы, то в первом приближении можно считать

$$c \approx 1. \quad (\text{II-19})$$

Используя соотношения (II-17—19), вместо формулы (II-14) будем иметь:

$$\frac{V_a}{V_k} \geq \frac{2}{V\pi} \sqrt{p} = 1,13 \sqrt{p}, \quad (\text{II-20})$$

откуда следует, что общий объем меди, израсходованной на обмотку возбуждения в конструкции с когтеобразными полюсами, получается не менее чем в $1,13 \sqrt{p}$ раз меньше, чем в обычной явнополюсной конструкции. Такое же соотношение имеет место и между потерями мощности в обмотке возбуждения, ибо эти потери, как известно, пропорциональны произведению объема провода V на квадрат плотности тока δ , а последняя принимается одинаковой в обеих машинах.

Таким образом, синхронная машина с когтеобразными полюсами по сравнению с обычной явнополюсной требует при прочих равных условиях значительно меньшего расхода меди и энергии на возбуждение, причем это преимущество возрастает с увеличением числа полюсов. Так, при числе полюсов, равном 6—8, экономия меди и энергии в этой машине получается примерно двукратной, но при повышении числа полюсов до 10—12 ротор с когтеобразными полюсами оказывается уже и ничуть не более экономичным, нежели обычный явнополюсный. Это свойство синхронной машины с когтеобразными полюсами является ее важнейшим практическим преимуществом перед всеми другими видами электрических машин. Можно утверждать, что применяемая в машинах с когтеобразными полюсами обмотка возбуждения является с экономической точки зрения весьма совершенной и что построение другой, еще более совершенной конструкции обмотки принципиально невозможно, ибо невозможно осуществить еще более тесный охват магнитопровода обмоткой, чем это имеет место при круглой катушке, плотно сидящей на стальном цилиндре и возбуждающей в нем полный поток машины.

II. МАЛЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДЛИНА МАШИНЫ

Важно уже указывалось, что в связи с наличием аксиально расположенных путей потока в машинах с когтеобразными полюсами величина полного потока машины независимо от ее внешней длины ограничивается радиальными размерами ротора и его отдельных деталей. Так, величина потока Φ_n через центральную втулку (рис. 62а) или цилиндр ротора (рис. 63) не может, очевидно, превышать величины

$$\Phi_n = \frac{\pi}{4} D_n^2 \cdot B_n, \quad (\text{II-21})$$

где

D_n — диаметр цилиндра или центральной втулки,

B_n — допускемая индукция в цилиндре.

С другой стороны, поскольку поток $\Phi_{\text{ц}}$ является полным потоком машины, равным сумме потоков всех p полюсов одной полярности, то должно также иметь место равенство

$$\Phi_{\text{ц}} = \sigma_{\text{ц}} \cdot p\Phi, \quad (\text{II-22})$$

где

Φ — полезный поток одного полюса,

$\sigma_{\text{ц}}$ — коэффициент рассеяния, учитывающий наличие потоков рассеяния и в соответствии с формулами (II-2, 3) равный

$$\sigma_{\text{ц}} = 1 + \frac{2\Phi_{\sigma\delta} + \Phi_{\sigma\epsilon} + \Phi_{\sigma m} + \frac{1}{p} \Phi_{\sigma b}}{\Phi}. \quad (\text{II-23})$$

Величина полезного потока полюса Φ может быть вычислена по известному соотношению

$$\Phi = \alpha_{\delta} \tau l_i B_{\delta}. \quad (\text{II-24})$$

Поэтому, подставляя выражение (II-24) в формулу (II-22), а затем (II-22) — в (II-21), после небольших преобразований нетрудно прийти к равенству

$$\frac{D_{\text{ц}}}{D} = \sqrt{2\sigma_{\text{ц}}\alpha_{\delta} \frac{B_{\delta}}{B_{\text{ц}}} \cdot \frac{l_i}{D}}, \quad (\text{II-25})$$

откуда видно, что отношение диаметра цилиндра $D_{\text{ц}}$ к диаметру расточки статора машины D должно увеличиваться с ростом отношения индукции в зазоре B_{δ} к индукции в цилиндре $B_{\text{ц}}$ и с ростом отношения расчетной длины машины l_i к диаметру расточки D . Но, с другой стороны, отношение $D_{\text{ц}}$ к D , как нетрудно установить с помощью рис. 62а, не может быть больше известного предела, ибо в противном случае окажется невозможным разместить обмотку возбуждения и когтеобразные полюса на роторе, а ротор в целом — внутри расточки статора. Поэтому в конструкциях, изображенных на рис. 62а и 63, как и вообще во всех машинах с аксиальным потоком, должно иметь место неравенство

$$\frac{D_{\text{ц}}}{D} < 1. \quad (\text{II-26})$$

Подставляя в это неравенство выражение (II-25), можно получить следующее соотношение:

$$\frac{l_i}{D} < \frac{1}{2\sigma_{\text{ц}}\alpha_{\delta} \frac{B_{\delta}}{B_{\text{ц}}}}. \quad (\text{II-27})$$

Обычно величина $\sigma_{\text{ц}}$ оказывается не меньше 1,1, а величину α_{δ} , как правило, не выбирают меньшей, чем 0,6. Индукцию

в цилиндре $B_{\text{ц}}$ при применении обычной малоуглеродистой стали практически невозможно повышать более 16 000 гс, а индукцию в зазоре B_{δ} нерационально выбирать меньше 5000 гс. Если подставить эти предельные значения величин в соотношение (II-27), то в результате будет иметь место неравенство

$$\frac{l_i}{D} < 2,5, \quad (\text{II-28})$$

определяющее собой тот верхний предел отношения длины машины к ее диаметру, который вообще возможен при наличии аксиальных путей магнитного потока.

Следует заметить, что определяемое неравенством (II-28) предельное значение относительной длины машины никогда не достигается на практике, ибо диаметр цилиндра $D_{\text{ц}}$ всегда приходится выполнять значительно меньшим D . Так, в конструкции, изображенной на рис. 62а, отношение $D_{\text{ц}}$ к D обычно не удается выполнить большим 0,5, поэтому вместо (II-28) в этом случае будет иметь место неравенство

$$\frac{l_i}{D} < 2,5 \cdot 0,5^2 = 0,625. \quad (\text{II-29})$$

Если к тому же учесть, что величина коэффициента рассеяния $\sigma_{\text{ц}}$ чисто оказывается большей 1,1, достигая значений 1,3–1,4, то верхний предел величины $\frac{l_i}{D}$ в конструкции на рис. 62а окажется совсем небольшим:

$$\frac{l_i}{D} < 0,625 \left(\frac{1,1}{1,4}\right)^2 = 0,385. \quad (\text{II-30})$$

Таким образом, наличие аксиально расположенных путей потока в машинах с когтеобразными полюсами является причиной того, что для получения достаточно высоких индукций в воздушном зазоре машины приходится выполнять относительно короткими. Это обстоятельство хотя и не является основным недостатком рассматриваемой конструкции, однако в ряде случаев может в известной степени ограничивать возможности ее применения.

в. ДЕЙСТВИЕ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ НА ОБМОТКУ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Существенной особенностью конструкции ротора с когтеобразными полюсами и вращающейся обмоткой возбуждения (рис. 62а) является растягивающее воздействие на эту обмотку радиально направленных центробежных сил (рис. 71).

Эти силы создают заметные механические напряжения в материале провода и, кроме того, могут быть причиной взаимных перемещений витков катушки, что, в свою очередь, может привести к повреждению межвитковой изоляции [9].

Для определения механических напряжений в материале провода катушки достаточно рассмотреть условия равновесия бесконечно малого элемента витка, характеризующегося бесконечно малым углом $d\varphi$ (рис. 71). Этот элемент находится под

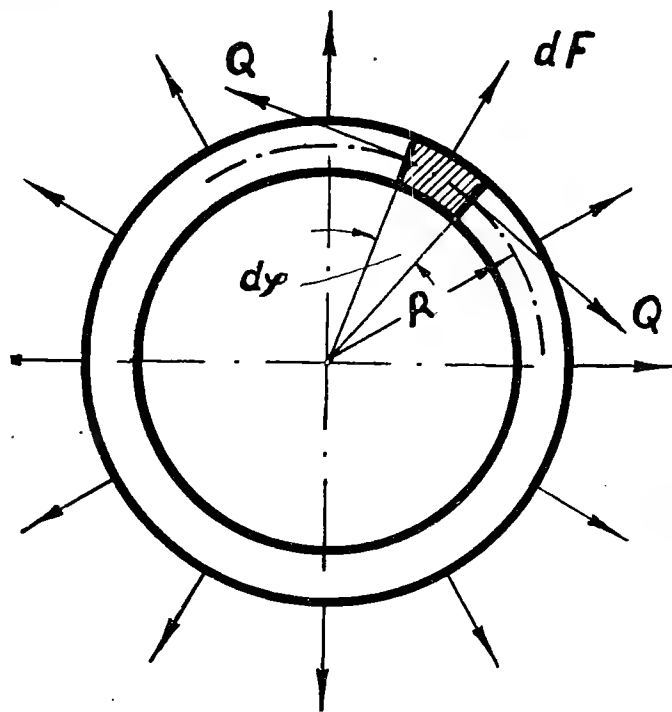


Рис. 71. Действие центробежных сил на круглую обмотку возбуждения.

воздействием трех сил: центробежной силы dF , направленной по радиусу, и двух сил сцепления с соседними элементами витка Q , направленных в разные стороны по касательным к средней окружности витка. Равновесие рассматриваемого элемента витка будет обеспечено, если между величинами dF , Q и $d\varphi$ будет иметь место соотношение

$$dF = 2Q \sin \frac{d\varphi}{2}. \quad (\text{II-31})$$

Центробежная сила dF , как известно, равна произведению массы элемента dm на нормальное ускорение $\frac{v^2}{R}$:

$$dF = \frac{v^2}{R} dm. \quad (\text{II-32})$$

Если виток имеет постоянное сечение S и плотность γ , то масса всего витка будет равна (рис. 71):

$$m = \gamma \cdot S \cdot 2\pi R. \quad (\text{II-33})$$

Тогда для массы рассматриваемого элемента витка можно написать:

$$dm = m \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \gamma S R d\varphi, \quad (\text{II-34})$$

и формула (II-32) примет вид:

$$dF = \gamma S v^2 d\varphi. \quad (\text{II-35})$$

Подставляя это выражение в равенство (II-31) и переходя к пределу при $d\varphi \rightarrow 0$, можно определить искомое нормальное напряжение в материале витка:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \gamma v^2. \quad (\text{II-36})$$

В соответствии с этим условие прочности витка будет иметь вид:

$$v \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\text{доп}}}{\gamma}}. \quad (\text{II-37})$$

Для проводниковой меди, например, $\gamma = 8,9 \text{ г/см}^3$ и $\sigma_{\text{доп}} = 600 \text{ кг/см}^2 = 5,9 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2$, и тогда согласно условию (II-37) предельная линейная скорость элемента витка будет равна:

$$v \leq 8120 \text{ см/сек} \approx 80 \text{ м/сек}.$$

Таким образом, по условиям прочности медного провода окружная скорость катушки возбуждения в машине конструкции рис. 62а не должна превышать 80 м/сек. При скорости вращения 1000 об/мин это условие ограничивает диаметр катушки величиной примерно до 1,5 м, а при больших скоростях вращения, например в 10 000 об/мин, допустимый диаметр катушки уменьшится уже до 150 мм. В случае необходимости применения больших диаметров можно применить бандажирование катушки, как это сделано, например, в [46], или же использовать бесконтактную конструкцию, изображенную на рис. 63, в которой ввиду неподвижности катушек рассмотренную конструкцию не имеет места.

10. КОНСТРУКТИВНАЯ ПРОСТОТА КОГТЕОБРАЗНОГО РОТОРА

Одним из наиболее существенных преимуществ машины с когтеобразными полюсами является относительно простое устройство ротора и малое количество деталей в нем. Во введении уже указывалось, что в этой конструкции нет необходимости отдельно изготавливать и устанавливать на роторе каждый полюс и каждую катушку. Полюса изготавливаются в виде двух целых комплектов-отливок, закрепляемых на роторе с помощью таких простых средств, как шпонка и достаточно тугая посадка. Катушка возбуждения в роторе с когтеобразными полюсами всего одна и весьма простой круглой формы. Изготовление такой катушки не представляет особого труда и сравнительно легко может быть механизировано. Расход меди на катушку, как было установлено выше, получается весьма небольшим. Невелик в связи с этим должен быть и расход изоляционных материалов, необходимых для изоляции катушки.

Процесс сборки ротора с когтеобразными полюсами несложен и состоит в посадке на вал втулки ротора, в посадке на втулку катушки и полюсных систем, выведении концов катушки возбуждения к контактным кольцам, установке подшипников и контактных колец, припайке концов катушки к контактным кольцам и в окончательной обточке наружной поверхности ротора.

Еще более прост по своему устройству ротор бесконтактной машины (см. рис. 63). В этой конструкции на роторе нет ни катушек, ни контактных колец, поэтому процесс сборки становится предельно простым: на вал насаживаются в горячем состоянии две полюсных системы с когтеобразными полюсами, после остывания их производится окончательная токарная обработка, а затем монтируются подшипники.

Конструктивная и технологическая простота ротора с когтеобразными полюсами имеет весьма большое значение для применения этой конструкции в машинах небольших мощностей, когда ввиду ограниченности размеров оказывается затруднительным применять те довольно сложные способы крепления явно выраженных полюсов, которые обычно используются в более крупных машинах («ласточкины хвосты», Т-образные крепления и т. п.). В этих условиях применение значительно более простой конструкции с когтеобразными полюсами в большинстве случаев оказывается выходом из положения и позволяет без ухудшения показателей машины значительно упростить ее производство. В этой связи следует считать характерным применение такой конструкции в малых синхронных машинах массового выпуска, какими являются автомобильные и автобусные генераторы [21, 24, 29, 43] и генераторы

для электроснабжения железнодорожных вагонов [27, 32, 40]. Весьма знаменателен также факт быстрого распространения этой конструкции в электромагнитных муфтах скольжения [20, 23, 39, 41, 47, 54], где ее применение, помимо упрощения производства, приводит еще и к улучшению показателей [20, 23, 54].

Наконец, весьма важна для народного хозяйства возможность применения конструкции с когтеобразными полюсами в синхронных двигателях небольших мощностей. Развитие производства этих двигателей сдерживается в основном их значительно большей сложностью и стоимостью по сравнению с асинхронными двигателями. Поэтому то значительное упрощение и удешевление, которое могло бы дать применение в этих двигателях конструкции ротора с когтеобразными полюсами, должно в ближайшем будущем послужить важным стимулом развития производства и применения относительно дешевых синхронных двигателей небольшой мощности.

Подводя итог сказанному, можно отметить, что простота конструкции ротора с когтеобразными полюсами, особенно в его бесконтактном исполнении, представляет весьма большой интерес для практики электромашиностроения, и, по крайней мере в машинах небольших мощностей, это качество оказывается настолько существенным, что перекрывает все имеющиеся у этой конструкции недостатки и позволяет строить простые, дешевые и эффективно работающие синхронные машины.

11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ БЕСКОНТАКТНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В заключение целесообразно рассмотреть еще две отличительные черты, свойственные только бесконтактной конструкции синхронной машины с когтеобразными полюсами (см. рис. 63).

Весьма интересная особенность машины, изображенной на рис. 63, состоит в некотором своеобразии продольной реакции якоря. Действительно, как нетрудно установить с помощью рис. 63 и 61, в машине без скользящих контактов поле продольной реакции не может замыкаться вокруг проводников обмотки якоря по пути $a_1b_1c_1d_1e_1e_2d_2c_2b_2a_2$ (рис. 61), ибо для этого необходимо было бы наличие ярма, которое в машине на рис. 63 отсутствует. Поэтому для потока продольной реакции якоря остается только один путь — путь основного потока, замыкающийся через внешний магнитопровод. Особенность здесь заключается в том, что путь продольного потока, как видно из рис. 63, обходит пазовые части проводников обмотки

якоря только со стороны спинки статора и таким образом не охватывает эти проводники полностью и не сцепляется с ними. Это, очевидно, означает, что токи, протекающие в пазовых частях обмотки якоря, не оказывают влияния на продольный поток машины и, значит, не создают продольной реакции. Вместо этих токов с контуром основного потока оказываются сцепленными, как нетрудно убедиться с помощью рис. 63, проводники лобовых частей обмотки якоря, токи в которых, таким образом, и создают продольную реакцию. Поскольку в лобовых частях обмотки протекают те же самые токи, что и в пазовых, то в количественном отношении «реакция лобовых частей» должна быть (и действительно оказывается) эквивалентной той обычной реакции, которая создается пазовыми частями обмотки (см. рис. 61). Но вместе с тем нельзя не отметить, что сам факт непосредственного участия «неактивных» лобовых частей в явлении продольной реакции якоря достаточно необычен и должен быть поэтому отнесен к особенностям магнитной цепи бесконтактной синхронной машины, изображенной на рис. 63.

Другая особенность этой конструкции заключается в своеобразии процесса наведения э. д. с. в обмотке статора потоком полюсов. Действительно, если предположить, что этот процесс происходит так же, как и в обычных машинах, т. е. за счет вращения поля ротора относительно статора, то тогда придется сделать вывод, что это поле должно также вращаться и внутри щитов и станины, т. е. должно перемещаться относительно создающих его катушек возбуждения. Но такой вывод должен быть признан неправильным, ибо вращение магнитопровода-ротора еще не может быть причиной вращения неподвижного по природе поля, создаваемого неподвижными катушками возбуждения. Поэтому следует заключить, что магнитное поле в машине без скользящих контактов остается неподвижным относительно щитов и станины, а ротор перемещается относительно этого поля. Однако тогда возникает вопрос, каким образом неподвижное в пространстве поле индуцирует в обмотке статора переменную э. д. с.? Для выяснения этого следует рассмотреть подробнее картину поля в цилиндре ротора вблизи его перехода в полюса (рис. 72). Пусть точки *a* изображенных на рис. 72 силовых линий остаются неподвижными, а контуры цилиндра и полюсов перемещаются, например, по стрелке *v*. Очевидно, что для того чтобы точки *a* линий оставались неподвижными, а сами линии, наматываясь вокруг оси машины, не вытягивались бы до бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы эти линии в точках *b* скользили по контуру полюса и постепенно изменяли свою форму, с тем чтобы после прохождения средней линии *O—O* между полю-

сами данной полярности перейти на следующий полюс, приняв там последовательно опять все возможные положения, вновь перейти на другой полюс и т. д.

Таким образом, оставаясь в основном неподвижными, силовые линии испытывают при вращении ротора непрерывные деформации, в результате которых картина поля в цилиндре

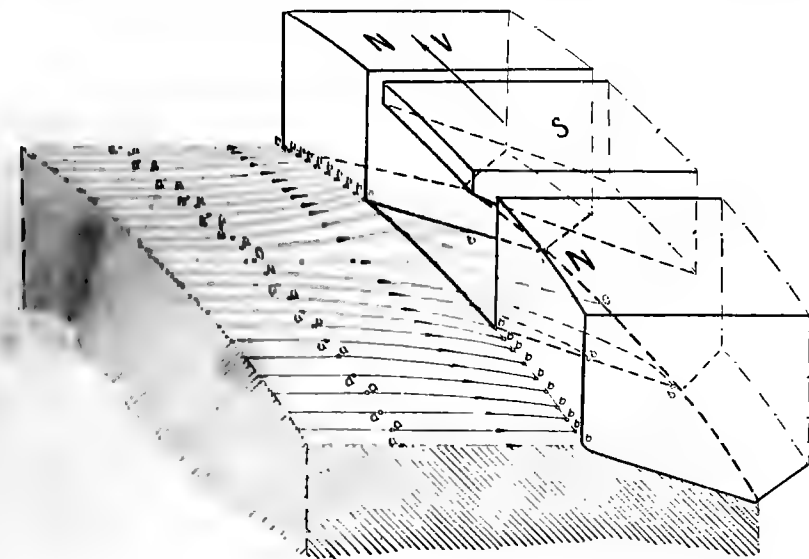


Рис. 72. К выяснению характера движений силовых линий в бесконтактной машине с когтеобразными полюсами.

и полюсах остается неизменной и поле движется вместе с ротором, как и в обычных машинах. Тот факт, что эта картина поля создается все время «разными» силовыми линиями, с точки зрения закона электромагнитной индукции в его максвелловской форме, очевидно, не имеет никакого значения. Что же касается фарадеевской формулировки закона электромагнитной индукции, требующей пересечения проводников силовыми линиями, то и с этой точки зрения не получается никакого противоречия, если учесть, что упомянутые выше деформации силовых линий имеют характер непрерывных колебаний около некоторого среднего положения и что в процессе этих колебаний каждая силовая линия должна неминуемо пересекать некоторую часть проводников обмотки статора.

Итак, силовые линии поля возбуждения в машине без скользящих контактов не вращаются относительно статора, а лишь совершают непрерывные колебания вдоль некоторой части его окружности. Этого, конечно, вполне достаточно для получения эффекта электромагнитной индукции в проводниках статорной обмотки.

ГЛАВА III

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В СТАТОРЕ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Магнитное поле синхронной машины с когтеобразными полюсами, как уже указывалось в предыдущей главе, носит сложный, пространственный характер. Эта сложность касается по существу всей магнитной цепи машины, в том числе таких ее важнейших участков, как статор и воздушный зазор. Поэтому детальное исследование магнитного поля в машине с когтеобразными полюсами является важной практической задачей, решение которой позволит выяснить все подробности протекающих в машине электромагнитных процессов и даст возможность внести в общую методику расчета синхронных машин те дополнения и коррективы, которые необходимо учитывать при использовании рассматриваемой конструкции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование магнитного поля синхронной машины с когтеобразными полюсами представляет собой весьма сложную задачу. Эта сложность усугубляется, в частности, тем обстоятельством, что в общем объеме рассматриваемого поля (см. рис. 67а или 63) существуют сечения с известным распределением скалярного магнитного потенциала или индукции. Даже те стальные поверхности полюсов и статора, которые обращены в воздушный зазор машины и обычно считаются равнопотенциальными, при использовании конструкции с когтеобразными полюсами не могут быть отнесены к таковым, ибо, например, магнитный потенциал полюса на его активной поверхности, ввиду наличия осевых составляющих индукции B_z и напряженности поля H_z (рис. 73), должен заметно изменяться вдоль длины машины. В связи с этим по законам преломления

пути потока на границе двух сред вектор индукции в воздушном зазоре $\vec{B}_\delta$ оказывается неперпендикулярным к поверхности полюса и имеет некоторую осевую составляющую $B_{\delta z}$ (рис. 73). Наличие этой составляющей, в свою очередь, вызывает изменение магнитного потенциала и по длине пакета статора, причем эти изменения могут быть весьма значительными ввиду больших падений магнитного напряжения в изоляционных прослойках между отдельными листами пакета.

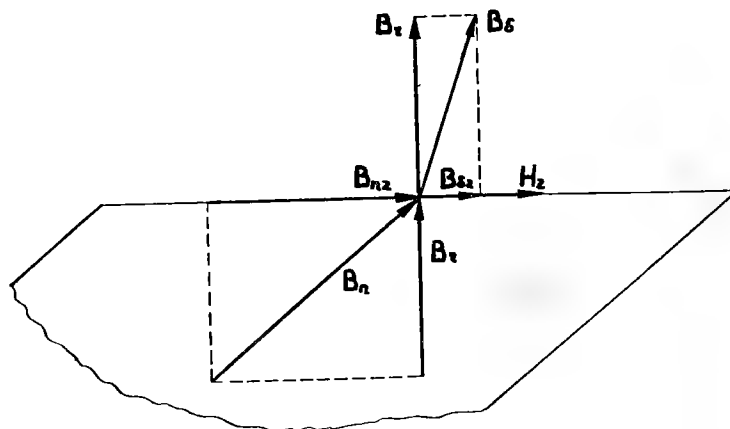


Рис. 73. Составляющие индукции и напряженности поля на границе когтеобразного полюса с воздушным зазором:
 B_δ — вектор индукции в воздушном зазоре; B_r и $B_{\delta z}$ — его радиальная и аксиальная составляющие; B_n — вектор индукции в полюсе; B_r и B_{pz} — его радиальная и аксиальная составляющие; H_z — аксиальная составляющая напряженности поля.

Отсутствие сечений с известным распределением потенциала или индукции, вообще говоря, не позволяет воспользоваться тем обычным приемом разделения магнитной цепи на отдельные области-участки, который дает возможность резко упростить задачу. Поэтому исследование магнитного поля в машине с когтеобразными полюсами должно производиться, строго говоря, для всей магнитной цепи в целом путем непосредственного решения основных уравнений магнитного поля для всей области, занимаемой этим полем.

Однако возможен и другой подход к решению задачи. Можно произвести подразделение поля на участки совершенно произвольно, исходя лишь из соображений возможно большего упрощения исследования, а неизвестное распределение индукции и потенциала на пограничных поверхностях между уча-

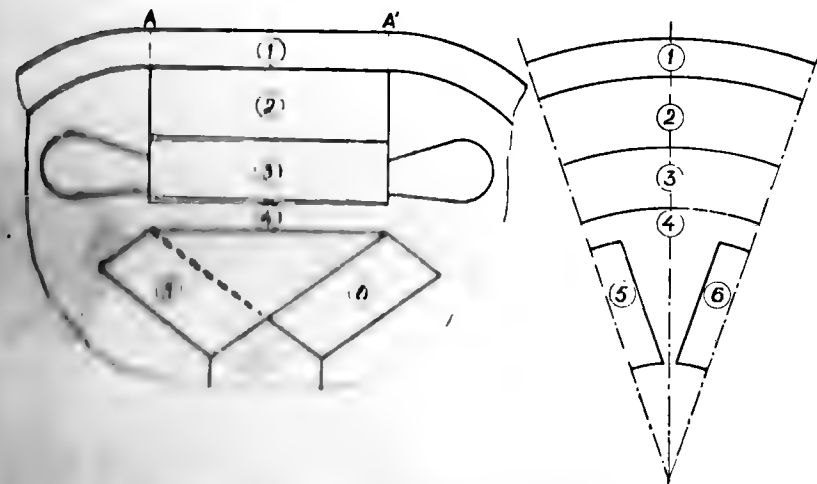


Рис. 74. Отдельный участок активной зоны синхронной машины с когтеобразными полюсами:
 1 — обмотка; 2 — статор; 3 — зубчатый слой; 4 — воздушный промежуток между статором и полюсами ротора; 5 и 6 — полюса ротора.

Применив эту методику к изучению магнитного поля в статоре и воздушном зазоре машины с когтеобразными полюсами, можно выделить в нем следующие участки (рис. 74):
 1) отрезок статора, заключенный между сечениями A и A' , являющимися продолжением боковых плоскостей пакета статора;

2) статор (просто) пакета статора;

3) зубчатый слой статора с обмоткой;

4) главный воздушный промежуток, к которому, помимо зазора, относится также междуполюсное пространство;

5) когтеобразные полюса левого расположения, основания которых располагаются слева (на рис. 74) от средней поперечной плоскости машины;

6) когтеобразные полюса правого расположения, основания которых располагаются справа от средней плоскости.

Рассматривая эти участки, нетрудно заметить, что некоторые из них, например станина, спинка статора, зубцовый слой, имеют относительно простую (близкую к цилиндрической) форму и могут быть при известных допущениях исследованы с помощью строгих аналитических методов. Наоборот, форма других участков — полюсов и воздушных промежутков — оказывается значительно более сложной, и исследование их возможно, по-видимому, только при использовании тех или иных приближенных способов.

В связи с этим представляется целесообразным разделить решение задачи на три этапа.

На первом из этих этапов будет исследовано магнитное поле в трех цилиндрических участках — станине, спинке статора и зубцовом слое. Применяя при этом строгие аналитические методы, можно будет найти общее выражение для скалярного магнитного потенциала на поверхности расточки статора в функции от магнитной индукции на этой же поверхности и от величины потока, входящего в станину. Далее, на втором этапе исследования будут рассмотрены остальные участки — полюса и воздушные пространства. При этом можно будет воспользоваться хорошо известным упрощенным методом, основанным на понятии удельной магнитной проводимости воздушного зазора. В результате этого расчета будет получено второе выражение для скалярного магнитного потенциала на поверхности расточки статора в функции от индукции на этой же поверхности и от величины потока в полюсе. Наконец, на третьем этапе исследования останется сравнить полученные два выражения для магнитного потенциала и из условий этого сравнения определить распределение магнитной индукции на поверхности расточки статора, а затем — и в любом другом месте исследуемой части магнитной цепи. Тем самым будет получено полное решение задачи.

2. СТАТОРНЫЕ УЧАСТКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

Переходя к первому этапу исследований, необходимо рассмотреть более подробно каждый из подлежащих изучению участков статора и оценить их с точки зрения возможностей применения аналитических методов исследования.

Геометрическая форма статорных участков

Рассматривая геометрическую форму участков, нетрудно заметить, что если спинка и зубцовый слой статора обладают совершенно правильной цилиндрической формой, то станина

имеет только одну цилиндрическую поверхность — внутреннюю расточку, а в остальном ее форма оказывается значительно более сложной вследствие наличия ребер, различных конструктивных выступов, впадин и т. п. Однако если учесть, что все эти конструктивные подробности находятся на внешней поверхности станины и, следовательно, их влияние на картину поля в статоре не может быть решающим; то при расчете этого поля можно приближенно считать внешнюю поверхность станины чисто цилиндрической, а наличие ребер и других конструктивных деталей ориентировочно учесть соответствующим изменением толщины стенки станины.

Тогда подлежащая изучению на первом этапе область V (рис. 75) будет иметь форму прямого полого цилиндра и состоять из трех concentрических частей — отрезка станины (1), спинки статора (2) и зубцового слоя (3).

Для дальнейшего рассмотрения удобно отнести область V к системе цилиндрических координат (r, φ, z) , ось которой ($r=0$) совпадает с осью машины, и ввести следующие обозначения (рис. 75):

- | | | |
|------------------------------------|---|-----------|
| r, φ, z | - координаты произвольной точки M в области V | } (III-1) |
| z_1, z_2 | - координаты левого и правого торцов области V | |
| $l = z_2 - z_1$ | - осевая длина цилиндра V | |
| R_1, R_2, R_3, R_4 | - радиусы цилиндрических поверхностей, являющихся границами области V и отдельных ее участков (1), (2), (3) | |
| B_1, B_2, B_3
H_1, H_2, H_3 | - составляющие векторов магнитной индукции B и напряженности поля H по координатным осям r, φ, z | |

Граничные условия на внешней поверхности области

Для исследования поля внутри выбранной области V необходимо, как известно, задать граничные условия на поверхности S , ограничивающей эту область. В рассматриваемом случае поверхность S состоит, как легко установить с помощью рис. 75, из внешней цилиндрической поверхности станины $r=R_1$, внутренней цилиндрической поверхности зубцового слоя (поверхности расточки статора) $r=R_4$ и двух торцовых поверхностей $z=z_1$ и $z=z_2$, совпадающих с крайними листами

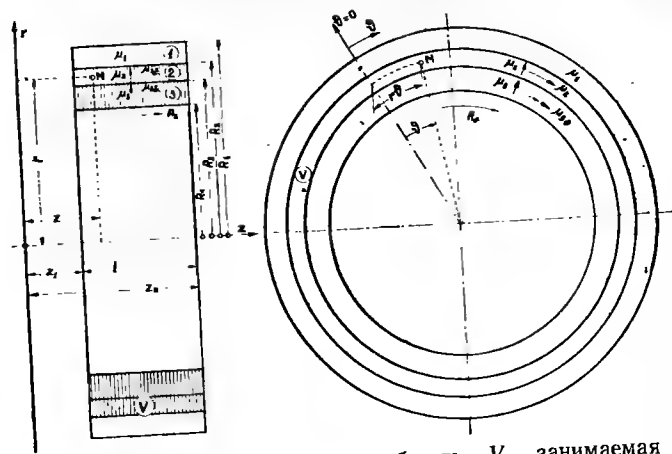


Рис. 75. Идеализованная область V, занимаемая статором машины:

1 — станина; 2 — спинка статора; 3 — зубцовый слой.

пакета статора. Рассматривая эти поверхности с точки зрения граничных условий, можно сделать следующие заключения.

а. Внешняя поверхность станины $r = R_1$ соприкасается с окружающим воздухом, магнитная проницаемость которого в несколько сот раз меньше магнитной проницаемости стали станины. В связи с этим магнитное поле вне станины должно быть весьма слабым, и в рассматриваемом случае им можно пренебречь. Это, очевидно, будет означать, что сквозь внешнюю поверхность станины $r = R_1$ магнитный поток не входит и не выходит, или, иначе говоря, нормальная к этой поверхности радиальная составляющая магнитной индукции B_r всюду равна нулю:

$$B_r \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (\text{III-2a})$$

б. Внутренняя поверхность зубцового слоя (расточка статора) $r = R_4$ граничит с главным воздушным зазором, поле в котором является искомой величиной. Согласно изложенному в § I настоящей главы, это поле на первом и втором этапах исследования следует считать условно заданным, т. е. имеющим вид произвольной функции координат θ и z (от координаты r эта функция не зависит, так как она относится к цилиндрической поверхности, на которой $r = R_4 = \text{const}$). Принимая в качестве характеристики этого поля нормальную к поверхности составляющую индукции B_r , можем написать:

$$B_r \Big|_{r=R_4} = b_4(\theta, z). \quad (\text{III-2b})$$

а. Торцовые поверхности $z = z_1$ и $z = z_2$ с точки зрения граничных условий следует разделить на две части. Первая часть — торцы пакета статора — относится к участкам (2) и (3) и характеризуется тем, что она граничит с окружающим воздухом. В связи с этим, по аналогии со сказанным в пункте а, для торцов пакета статора можно считать, что нормальная к этим торцам осевая составляющая индукции B_z равна нулю. Вторая часть — торцы отрезка станины (1) — характерна, наоборот, тем, что, например, при бесконтактной конструкции статора все проходит значительный магнитный поток, причем распределение этого потока по сечению торца заранее неизвестно. Ориентируясь на то, что это распределение, по-видимому, не будет сильно отличаться от равномерного, можно на первом этапе исследования считать его условно заданным в виде некоторой функции от координат r и θ , а в дальнейшем, на третьем этапе исследования, нетрудно будет установить, как влияет вид этой функции на искомый результат. При этом в случае необходимости можно будет приблизительно определить эту функцию, рассматривая отрезок станины (1) совместно с ее отсеченными концами.

Резюмируя изложенное, для граничных условий на торцовых поверхностях можно написать:

$$\left. \begin{aligned} B_z \Big|_{z=z_1} &= \begin{cases} b_{z1}(r, \theta) & (R_1 \geq r \geq R_2) \\ 0 & (R_2 \geq r \geq R_4) \end{cases} \\ B_z \Big|_{z=z_2} &= \begin{cases} b_{z2}(r, \theta) & (R_1 \geq r \geq R_2) \\ 0 & (R_2 \geq r \geq R_4) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-2c})$$

Магнитные свойства статорных участков

Рассматривая далее магнитные свойства участков (1), (2), (3), можно заметить, что эти участки заполнены в основном сталью, и, следовательно, зависимость между индукцией и напряженностью поля в них носит нелинейный характер. Кроме того, участки (2) и (3) выполнены из отдельных стальных листов и оказываются, таким образом, расслоенными, а участок (3), помимо того, снабжен еще пазами, так что его форма, в сущности, не является строго цилиндрической. Наконец, необходимо учитывать также наличие электрических токов, распределенных по объему статорных участков. Основная часть этих токов протекает по проводникам обмотки статора, занимающим пазовые пространства в участке (3). Другая часть токов носит характер вихревых и возникает в стали статора и станины вследствие изменения магнитного поля во времени (при вращении машины).

Таким образом, магнитные свойства статорных участков оказываются сложными, и для возможности применения аналитических методов исследования необходимо внести ряд упрощающих предположений.

Прежде всего необходимо условно положить, что участки (1), (2) и (3) заполнены не сталью, а некоторым другим материалом, магнитная проницаемость которого постоянна и равна среднему (по объему участка) значению магнитной проницаемости стали. Этим самым будет устранено основное затруднение расчета, связанное с нелинейным характером зависимости между B и H .

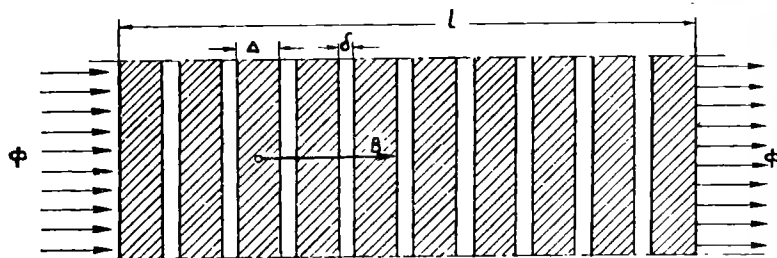


Рис. 76. К выводу выражения для магнитной проницаемости пакета стали поперек листов:

Δ — толщина листа; δ — толщина прослойки между листами; l — длина пакета; Φ — поток поперек листов; B — соответствующая индукция.

Далее следует допустить, что листы пакета статора и прослойки между этими листами имеют бесконечно малую толщину, а количество этих листов и прослоек — бесконечно велико. При этом сплошной материал пакета окажется в пределе замененным сплошным материалом с анизотропными свойствами: магнитная проницаемость этого материала в осевом (перпендикулярном к плоскости листов) направлении будет значительно меньше, чем в остальных направлениях. Величину этой проницаемости μ_z можно определить следующим образом.

Пусть пакет статора содержит n листов (рис. 76). Если толщину каждого листа обозначить через Δ , а толщину прослойки между листами — через δ , то общая толщина (длина) пакета l будет, очевидно, равна:

$$l = n \cdot \Delta + (n - 1) \delta. \quad (\text{III-3})$$

Пусть сквозь пакет перпендикулярно к плоскости его листов проходит магнитный поток Φ , причем поле внутри пакета получается однородным, а магнитная индукция всюду

равна B . Если магнитная проницаемость материала листов равна μ , а прослойка μ_0 , то напряженность поля в пакете будет:

$$\begin{aligned} \text{в листе } H &= \frac{B}{\mu} \\ \text{в прослойке } H_0 &= \frac{B}{\mu_0} \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

Вычислим теперь м. д. с. F , необходимую для проведения потока Φ сквозь пакет. Применяя известные соотношения и используя равенства (III-4), получим:

$$F = \int H d\vec{l} = nH \Delta + (n - 1) H_0 \delta = B \left[\frac{n\Delta}{\mu} + \frac{(n-1)\delta}{\mu_0} \right].$$

Разделив величину этой м. д. с. на длину пакета l и используя соотношение (III-3), найдем выражение для среднего значения напряженности поля в пакете:

$$H_{\text{ср}} = \frac{F}{l} = \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{\frac{\mu_0}{\mu} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\delta}{\Delta}}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\delta}{\Delta}}$$

и, отнеся B к $H_{\text{ср}}$, получим среднюю (эквивалентную) магнитную проницаемость поперек пакета:

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{B}{H_{\text{ср}}} = \mu_0 \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\delta}{\Delta}}{\frac{\mu_0}{\mu} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\delta}{\Delta}}.$$

Предел этого выражения при $n \rightarrow \infty$ и $\frac{\delta}{\Delta} = \epsilon = \text{const}$ и дает искомую величину μ_z магнитной проницаемости пакета в осевом направлении:

$$\mu_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\text{ср}} = \mu_0 \frac{1 + \epsilon}{\frac{\mu_0}{\mu} + \epsilon}. \quad (\text{III-5})$$

Здесь через ϵ обозначено отношение толщины прослойки δ к толщине листа Δ :

$$\epsilon = \frac{\delta}{\Delta}. \quad (\text{III-5a})$$

Обычно $\delta = (0,05 \div 0,1) \Delta$ и $\mu = (1000 \div 3000) \mu_0$, поэтому согласно формуле (III-5) можно написать

$$\mu_z = \mu_0 \frac{1 + (0,05 \div 0,1)}{(0,001 \div 0,0003) + (0,05 \div 0,1)} \approx (10 \div 20) \mu_0$$

и, следовательно,

$$\frac{\mu_z}{\mu_0} = 10 \div 20; \quad \frac{\mu_z}{\mu} = 0,003 \div 0,02. \quad (\text{III-5b})$$

Отсюда видно, что проницаемость пакета в осевом направлении в 50—300 раз меньше проницаемости в плоскости листа, но все же в 10—20 раз больше проницаемости прослоек между листами.

Из вывода соотношений (III-5) легко также заметить, что поскольку $\frac{\mu_0}{\mu} \ll \epsilon$, а $\epsilon \ll 1$, то для расчета величины μ_z можно вместо формул (III-5) пользоваться приближенной формулой

$$\mu_z \approx \frac{\mu_0^*}{\epsilon} = \mu_0 \frac{\Delta}{\delta}. \quad (\text{III-5c})$$

Следующим шагом по пути упрощения задачи должно быть устранение зубчатости статора. Здесь возможны два способа. Во-первых, можно просто пренебречь наличием пазов и считать, что зубцовый слой (3) отличается от спинки (2) лишь пониженной магнитной проводимостью (за счет наличия в действительном зубцовом слое пазов), которую можно учесть соответствующим снижением расчетной магнитной проницаемости зубцового слоя. Этот способ очень прост, но неточен, так как при пользовании им совершенно не учитывается тот факт, что поток в зубцовом слое ввиду наличия пазов может распространяться в основном только в радиальном направлении. Второй, более точный способ основан на том же приеме, который был применен выше при устранении расслоенности пакета статора. Будем постепенно увеличивать количество пазов и зубцов N и одновременно уменьшать их ширину так, чтобы отношение ширины паза b_n к ширине зубца b_z оставалось постоянным. В пределе, когда $N \rightarrow \infty$, зубчатость статора исчезнет, но преимущественное распространение потока по радиусам сохранится, так как магнитная проницаемость полученного сплошного материала в направлении окружности будет значительно меньше, чем в радиальном направлении. Величина этой проницаемости μ может быть определена таким же путем, как это было сделано выше для μ_z , и по аналогии с выражением (III-5) равна:

$$\mu_\Phi = \mu_0 \frac{1 + \kappa}{\frac{\mu_0}{\mu} + \kappa}, \quad (\text{III-6})$$

где величина κ представляет собой отношение ширины паза b_n к ширине зубца b_z :

$$\kappa = \frac{b_n}{b_z}, \quad (\text{III-6a})$$

а через μ и μ_0 обозначены магнитные проницаемости материала зубца и паза. Обычно $\kappa = 0,4 \div 0,6$ и $\frac{\mu}{\mu_0} = (1000 \div 3000)$, так что согласно формуле (III-6) можно написать:

$$\mu_\Phi = \mu_0 \frac{1 + (0,4 \div 0,6)}{(0,001 \div 0,0003) + (0,4 \div 0,6)} \approx (2 \div 4) \mu_0. \quad (\text{III-6b})$$

Отсюда видно, что проницаемость зубцового слоя в тангенциальном направлении всего лишь в 2—4 раза превышает проницаемость воздуха, и, следовательно, она в несколько сот раз меньше проницаемости зубцов в радиальном направлении.

Из соотношения (III-6), кроме того, следует, что при $\mu \gg \mu_0$ для расчета величины μ_Φ можно вместо (III-6) пользоваться более простой формулой:

$$\mu_\Phi = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right). \quad (\text{III-6c})$$

Последнее упрощение задачи должно коснуться электрических токов, протекающих в статорных участках. Часть из них — вихревые токи в стали статора и станины — имеют относительно небольшую величину, так как пакет статора расслоен, а магнитный поток в станине в основном постоянен и сравнительно мало изменяется во времени. В связи с этим магнитным действием вихревых токов можно пренебречь и при исследовании поля в статорных участках полагать, что изменения этого поля во времени происходят настолько медленно, что вихревые токи не возникают. Это, очевидно, позволяет считать, что в каждый отдельный момент времени картину поля можно условно полагать стационарной и рассчитывать ее с помощью уравнений магнитостатики.

Несколько сложнее обстоит дело с токами в обмотке статора. Эти токи в реальной машине распределены в пазовых пространствах, а после того преобразования зубцового слоя, которое было сделано выше, они, очевидно, оказались распределенными вместе с пазами уже по всему зубцовому слою. В обоих случаях токи оказываются распределенными по объему участка (3) и их учет сильно затрудняется тем, что для расчета поля в этом участке нельзя воспользоваться скалярным потенциалом.

Для упрощения задачи можно применить следующий простой прием, который часто употребляется в теории электрических машин. Будем постепенно вытеснять токи из верхней части зубцового слоя, заставляя их все больше и больше уходить вблизи поверхности расточки статора, и в пределе заменим для их протекания лишь бесконечно тонкий слой ϵ , соответствующий с поверхностью расточки (рис. 77). Плотность

тока при этом, естественно, станет бесконечно большой, однако магнитное действие токов изменится не сильно, так как общая величина тока (полный ток) и его распределение по окружности статора при указанном преобразовании не изменяются. Вместе с тем, область (3) оказывается освобожденной от токов,

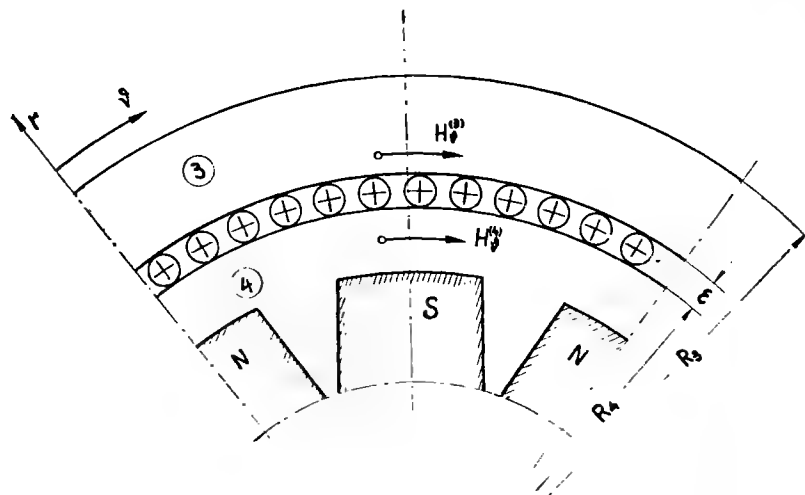


Рис. 77. К замене реальных токов в обмотке статора бесконечно тонким токовым слоем (осевые составляющие токов):

3 — зубцовый слой; 4 — воздушный промежуток между статором и ротором; ϵ — толщина условного токового слоя на поверхности статора.

и ее можно рассчитывать с помощью скалярного потенциала. Учет магнитного действия токов статора теперь надо будет производить только на одной поверхности расточки, т. е. при переходе зубцового слоя (3) к воздушному зазору. При этом переходе, как известно [55], происходит скачок тангенциальной составляющей вектора напряженности поля, так что на поверхности расточки должно удовлетворяться условие (рис. 77)

$$H_{\phi}^{(3)} - H_{\phi}^{(4)} = A_z, \quad (\text{III-7a})$$

где $H_{\phi}^{(3)}$, $H_{\phi}^{(4)}$ — тангенциальные составляющие вектора напряженности поля на поверхности расточки в зубцовом слое (3) и воздушном зазоре (4),

A_z — линейная нагрузка статора, равная линейной (вдоль длины окружности расточки) плотности токов i_z в статорной обмотке:

$$A_z = \frac{di_z}{R_s d\phi}. \quad (\text{III-7b})$$

При этом положительными направлениями токов i_z и составляющих $H_{\phi}^{(3)}$ и $H_{\phi}^{(4)}$ на рис. 77 приняты те, которые совпадают с направлениями осей координат ϕ и z (см. также рис. 75).

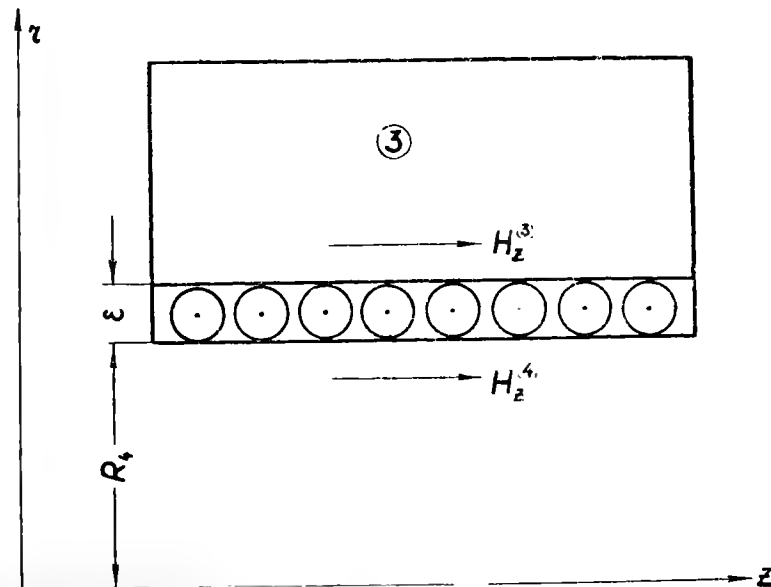


Рис. 78. К замене реальных токов в обмотке статора бесконечно тонким токовым слоем (тангенциальные составляющие токов):

3 — зубцовый слой; 4 — воздушный промежуток между статором и ротором; ϵ — толщина условного токового слоя на поверхности статора.

При наличии скося пазов статора электрические токи в обмотке статора приобретают, помимо осевой, и тангенциальную составляющую. В этом случае должна испытать скачок также и осевая составляющая напряженности поля H_z . Поэтому по аналогии с выражением (III-7a) согласно рис. 78 можно написать:

$$H_z^{(3)} - H_z^{(4)} = -A_{\phi}, \quad (\text{III-7c})$$

причем положительными направлениями составляющих H_z и A_{ϕ} считаются, как и на рис. 77, направления, совпадающие с осями z и ϕ , а для тангенциальной составляющей линейной

нагрузки статора A_Φ аналогично выражению (III-7b) имеет место равенство

$$A_\Phi = \frac{di_\Phi}{dz}. \quad (\text{III-7d})$$

3. ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ЭТАПА ИССЛЕДОВАНИЯ

В результате сделанных в § 2 упрощений задача первого этапа свелась к исследованию магнитостатического поля в области V , имеющей форму правильного прямого полого цилиндра и состоящей из трех концентрических частей (1), (2) и (3) (см. рис. 75), заполненных каждая однородным материалом с линейными магнитными свойствами¹. Материал участка (1) изотропен и имеет магнитную проницаемость μ_1 , одинаковую по всем направлениям и во всех точках участка. Материалы участков (2) и (3) обладают осевой анизотропией, и их магнитные проницаемости по различным направлениям неодинаковы (табл. 1 и рис. 75). Электрические токи протекают лишь по внутренней цилиндрической поверхности рассматриваемой области, а внутри этой области отсутствуют.

Таблица 1

Магнитные характеристики статорных участков

Участок	Магнитная проницаемость		
	в радиальном направлении	в тангенциальном направлении	в осевом направлении
Станина (1)	μ_1	μ_1	μ_1
Спинка статора (2) . . .	μ_2	μ_2	μ_{2z}
Зубцовый слой (3) . . .	μ_3	$\mu_{3\Phi}$	μ_{3z}

Примечания: 1) Проницаемости μ_1 , μ_2 и μ_3 равны средним значениям проницаемости стали соответствующего участка.

2) Проницаемости μ_{2z} и μ_{3z} вычисляются по формулам (III-5 или 5с), а проницаемость $\mu_{3\Phi}$ — по формулам (III-6 или 6с).

В такой формулировке задача оказывается уже вполне разрешимой, причем имеются все возможности получить это решение чисто аналитическим путем.

¹ Под линейными магнитными свойствами здесь понимается линейный характер зависимости между какой-либо составляющей (по оси анизотропии) напряженности магнитного поля H_i и соответствующей составляющей индукции B_i : $B_i = \mu_i H_i$, причем $\mu_i = \text{const}$ для всех точек участка.

Основные уравнения поля

Согласно сказанному в § 2, при решении рассматриваемой задачи можно исходить из основных уравнений магнитостатического поля

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-8})$$

Поскольку в рассматриваемой области V плотность тока $\vec{j}$ всюду равна нулю, то второе уравнение (III-8) примет вид

$$\text{rot } \vec{H} = 0. \quad (\text{III-8a})$$

Из векторного анализа известно [56], что уравнение (III-8a) эквивалентно следующему:

$$\vec{H} = -\text{grad } u. \quad (\text{III-8b})$$

Поэтому вместо (III-8) будет иметь место система

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \vec{H} &= -\text{grad } u \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-9})$$

где

u — скалярный магнитный потенциал.

Ввиду того что область V заполнена средой, обладающей осевой анизотропией, связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$ может быть выражена только через проекции этих векторов на оси анизотропии, которые, как нетрудно заметить из рис. 75, совпадают с осями выбранных цилиндрических координат r , Φ , z . Проектируя векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на эти оси и пользуясь индексами r , Φ , z для обозначения соответствующих проекций и магнитных проницаемостей, можно написать:

$$B_r = \mu_r H_r; \quad B_\Phi = \mu_\Phi H_\Phi; \quad B_z = \mu_z H_z. \quad (\text{III-10})$$

Выразим в цилиндрических координатах также уравнения поля (III-9). При этом, как известно [56], будем иметь:

а) вместо первого уравнения (III-9)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{III-9a})$$

б) вместо второго уравнения (III-9)

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{\partial u}{\partial r} \\ H_\Phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi} \\ H_z &= -\frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-9b})$$

Подставляя уравнения (III-9b) в равенства (III-10), найдем:

$$B_r = -\mu_r \frac{\partial u}{\partial r}; \quad B_\varphi = -\mu_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \quad B_z = -\mu_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{III-10a})$$

Используя эти соотношения и принимая во внимание, что величины $\mu_r, \mu_\varphi, \mu_z$ по условию (см. выше) не зависят от координат, получим основное уравнение поля (III-9a) в следующем виде:

$$\mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \mu_\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III-11})$$

Это уравнение отличается от уравнения Лапласа в цилиндрических координатах лишь наличием множителей $\mu_r, \mu_\varphi, \mu_z$ и переходит в уравнение Лапласа в частном случае, когда $\mu_r = \mu_\varphi = \mu_z$. В связи с этим уравнение (III-11) может быть названо *обобщенным уравнением Лапласа*. В векторной форме это уравнение можно записать в виде:

$$\text{div } \mu_{\text{инк}} \text{ grad } u = 0, \quad (\text{III-11a})$$

где $\mu_{\text{инк}}$ является, вообще говоря, тензором второго ранга [57].

Граничные условия для отдельных участков

К уравнению (III-11) необходимо добавить граничные условия.

Рассмотрим эти условия по отдельным участкам. Условимся обозначать номер участка соответствующими индексами (1), (2) или (3), поставленными сверху отмечаемой буквы, например, $b^{(1)}, b^{(2)}, u^{(2)}$ и т. п. Величины, относящиеся к левой или нижней (на рис. 75) граничным поверхностям участка, будем обозначать нижним индексом 1, а величины, относящиеся к правой или верхней поверхностям — нижним индексом 2. При этом будем иметь

1) для станины (1):

а) на внешней цилиндрической поверхности станины ($r=R_1$) нормальную составляющую индукции B_r можно положить равной нулю (см. § 2):

$$B_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = b_{r2}^{(1)}(\vartheta, z) = 0; \quad (\text{III-12a})$$

б) на внутренней цилиндрической поверхности станины ($r=R_2$) нормальная составляющая индукции B_r неизвестна и является функцией координат ϑ и z :

$$B_r^{(1)} \Big|_{r=R_2} = b_{r1}^{(1)}(\vartheta, z); \quad (\text{III-12b})$$

в) на торцах станины (т. е. на поверхностях $z=z_1$ и $z=z_2$) распределение нормальной составляющей индукции считается условно заданным (см. § 2) и является функцией координат ϑ и r :

$$\left. \begin{aligned} B_z^{(1)} \Big|_{z=z_1} &= b_{z1}^{(1)}(r, \vartheta) \\ B_z^{(1)} \Big|_{z=z_2} &= b_{z2}^{(1)}(r, \vartheta) \end{aligned} \right\}; \quad (\text{III-12c})$$

2) для спинки статора (2) и зубцового слоя (3):

а) на торцах пакета статора (т. е. на поверхностях $z=z_1$ и $z=z_2$) нормальную составляющую индукции B_z можно положить равной нулю (см. § 2):

$$\left. \begin{aligned} B_z^{(2)} \Big|_{z=z_1} &= 0, \quad B_z^{(2)} \Big|_{z=z_2} = 0 \\ B_z^{(3)} \Big|_{z=z_1} &= 0, \quad B_z^{(3)} \Big|_{z=z_2} = 0 \end{aligned} \right\}; \quad (\text{III-12d})$$

б) на цилиндрических поверхностях участков (2) и (3) распределение нормальной составляющей индукции B_r неизвестно (см. § 2) и является функцией координат ϑ и z :

$$\left. \begin{aligned} B_r^{(2)} \Big|_{r=R_2} &= b_{r2}^{(2)}(\vartheta, z); \quad B_r^{(2)} \Big|_{r=R_3} = b_{r1}^{(2)}(\vartheta, z) \\ B_r^{(3)} \Big|_{r=R_3} &= b_{r2}^{(3)}(\vartheta, z); \quad B_r^{(3)} \Big|_{r=R_4} = b_{r1}^{(3)}(\vartheta, z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-12e})$$

Далее рассмотрим условия на пограничных поверхностях между участками (1) и (2) и участками (2) и (3). Эти условия, как известно, сводятся к непрерывности нормальной составляющей индукции $B_n = B_r$ и касательной составляющей напряженности магнитного поля $H_t = \sqrt{H_\varphi^2 + H_z^2}$. Вместо последней величины H_t можно рассматривать ее составляющие H_φ и H_z , которые, очевидно, тоже должны оставаться непрерывными.

Применительно к участкам на рис. 75 будем иметь

а) на пограничной поверхности $r=R_2$ между участками (1) и (2):

$$\left. \begin{aligned} B_r^{(1)} \Big|_{r=R_2} &= B_r^{(2)} \Big|_{r=R_2} \\ H_\varphi^{(1)} \Big|_{r=R_2} &= H_\varphi^{(2)} \Big|_{r=R_2}, \quad H_z^{(1)} \Big|_{r=R_2} = H_z^{(2)} \Big|_{r=R_2} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-13a})$$

б) на пограничной поверхности $r=R_3$ между участками (2) и (3):

$$\left. \begin{aligned} B_r^{(2)} \Big|_{r=R_3} &= B_r^{(3)} \Big|_{r=R_3} \\ H_\varphi^{(2)} \Big|_{r=R_3} &= H_\varphi^{(3)} \Big|_{r=R_3}, \quad H_z^{(2)} \Big|_{r=R_3} = H_z^{(3)} \Big|_{r=R_3} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-13b})$$

Подставляя в эти условия равенства (III-12b, e и 9b) получим:

$$\left. \begin{aligned} b_1^{(1)}(\vartheta, z) &= b_1^{(2)}(\vartheta, z) = b_2(\vartheta, z) \\ b_1^{(2)}(\vartheta, z) &= b_1^{(3)}(\vartheta, z) = b_3(\vartheta, z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-14a})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_2} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_2}; & \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{r=R_2} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{r=R_2} \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_3} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_3}; & \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{r=R_3} &= \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z} \Big|_{r=R_3} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-14b})$$

где через $b_2(\vartheta, z)$ и $b_3(\vartheta, z)$ обозначена нормальная составляющая индукции на поверхностях $r=R_2$ и $r=R_3$.

Интегрируя уравнения (III-14b) по ϑ или по z , получим:

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}(R_2, \vartheta, z) &= u^{(2)}(R_2, \vartheta, z) + \varphi_2(z) \\ u^{(1)}(R_2, \vartheta, z) &= u^{(2)}(R_2, \vartheta, z) + \psi_2(\vartheta) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-14c})$$

$$\left. \begin{aligned} u^{(2)}(R_3, \vartheta, z) &= u^{(3)}(R_3, \vartheta, z) + \varphi_3(z) \\ u^{(2)}(R_3, \vartheta, z) &= u^{(3)}(R_3, \vartheta, z) + \psi_3(\vartheta) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-14d})$$

Эти равенства возможны, очевидно, только в том случае, если

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \psi_2(\vartheta) = C_{12}; \\ \varphi_3(z) &= \psi_3(\vartheta) = C_{23}, \end{aligned}$$

где C_{12} и C_{23} — постоянные величины.

Следовательно, вместо равенств (III-14c и d) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u(R_2, \vartheta, z) &= u^{(2)}(R_2, \vartheta, z) + C_{12} \\ u(R_3, \vartheta, z) &= u^{(3)}(R_3, \vartheta, z) + C_{23} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-14})$$

Наличие постоянных C_{12} и C_{23} в равенствах (III-14) отражает тот известный факт, что скалярный магнитный потенциал $u(r, \vartheta, z)$ может быть определен лишь с точностью до произвольной постоянной (см. далее формулы III-33b, 34, 42d).

Рассмотрим еще условие на поверхности расточки статора, которое должно соблюдаться при переходе от зубцового слоя (3) к воздушному зазору (4). Как было показано в § 2, это условие связывает тангенциальную и осевую составляющие напряженности поля с электрическими токами, протекающими в обмотке статора, и имеет вид (III-7a, c). Подставляя теперь в эти условия равенства (III-9b), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R_4} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_4} + \frac{1}{R_4} \frac{\partial u^{(4)}}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_4} &= A_z \\ -\frac{\partial u^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=R_4} + \frac{\partial u^{(4)}}{\partial z} \Big|_{r=R_4} &= -A_\vartheta \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-15a})$$

Интегрируя первое из этих равенств по ϑ , а второе — по r , получим:

$$\left. \begin{aligned} u^{(3)}(R_4, \vartheta, z) + u^{(4)}(R_4, \vartheta, z) &= R_4 \int A_z d\vartheta + \varphi(z) \\ u^{(3)}(R_4, \vartheta, z) + u^{(4)}(R_4, \vartheta, z) &= - \int A_\vartheta dz + \psi(\vartheta) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-15b})$$

Для определения вида произвольных функций $\varphi(z)$ и $\psi(\vartheta)$ необходимо продифференцировать первое из равенств (III-15b) по z , а второе — по ϑ . Тогда, сравнивая полученные равенства с уравнениями (III-15a), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -A_\vartheta - R_4 \int \frac{\partial A_z}{\partial z} d\vartheta \\ \frac{d\psi}{d\vartheta} &= R_4 A_z + \int \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} dz \end{aligned} \right\}$$

Интегрируя первое из этих равенств по z , а второе — по ϑ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= - \int A_\vartheta dz - R_4 \int A_z d\vartheta + C_1 \\ \psi(\vartheta) &= \int A_\vartheta dz + R_4 \int A_z d\vartheta + C_2 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-15c})$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Суммируя оба равенства (III-15c), будем иметь:

$$\varphi(z) + \psi(\vartheta) = C_1 + C_2 = \text{const},$$

что, очевидно, возможно только в том случае, если

$$\varphi(z) = C_\varphi = \text{const}, \quad \psi(\vartheta) = C_\psi = \text{const}. \quad (\text{III-15d})$$

Подставляя этот результат в равенства (III-15c), получим условие, которому должны удовлетворять осевая и тангенциальная составляющие линейной нагрузки:

$$\int A_\vartheta dz + R_4 \int A_z d\vartheta = C = \text{const}. \quad (\text{III-15e})$$

Как нетрудно проверить, это условие является одним из выражений принципа непрерывности электрического тока и поэтому, естественно, всегда удовлетворяется.

На основании соотношений (III-15d, e) равенства (III-15b) можно переписать в виде:

$$u^{(4)}(R_4, \vartheta, z) = u^{(3)}(R_4, \vartheta, z) + i(\vartheta, z), \quad (III-15f)$$

где

$$i(\vartheta, z) = R_4 \int A_z d\vartheta + C' = - \int A_\vartheta dz + C''. \quad (III-15g)$$

В заключение остается выразить граничные условия (III-12a — e) через потенциал $u(r, \vartheta, z)$. Подставив в эти условия соотношения (III-10a) и используя равенства (III-14a) и данные таблицы 1, получим:

1) для станины (1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= 0; \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = -\frac{1}{\mu_1} b_{z1}(r, \vartheta) \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= -\frac{1}{\mu_1} b_2(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{\mu_1} b_{z2}(r, \vartheta) \end{aligned} \right\}, \quad (III-16a)$$

2) для спинки статора (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= -\frac{1}{\mu_2} b_2(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = 0 \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_3} &= -\frac{1}{\mu_2} b_3(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (III-16b)$$

3) для зубцового слоя (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=R_3} &= -\frac{1}{\mu_3} b_3(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = 0 \\ \frac{\partial u^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=R_4} &= -\frac{1}{\mu_3} b_4(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (III-16c)$$

где через $b_4(\vartheta, z)$ обозначена нормальная составляющая индукции на поверхности расточки статора ($r=R_4$).

Таким образом, для каждого из участков (1), (2), (3) имеем уравнение (III-11) и граничные условия (III-16a, b или c), а для границ между участками — уравнения (III-14 и 15f).

Нетрудно заметить, что граничные условия (III-16a, b, c) по форме совершенно одинаковы. Поэтому представляется целесообразным прежде всего решить уравнение (III-11) при граничных условиях более общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} b_{r1}(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = -\frac{1}{\mu_z} b_{z1}(r, \vartheta) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} b_{r2}(\vartheta, z); \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{\mu_z} b_{z2}(r, \vartheta) \end{aligned} \right\}, \quad (III-16)$$

а затем, применив полученное решение последовательно к участкам (1), (2) и (3) и используя условия на границах (III-14 и 15f), найти решение поставленной задачи.

4. РЕШЕНИЕ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ

Уравнение (III-10) и граничные условия (III-16) представляют собой, как легко заметить, вторую краевую задачу (задачу Пеймана). Для решения этой задачи можно воспользоваться эффективным методом, разработанным чл.-корр. АН СССР Г. А. Гринбергом [58].

Представление решения в виде ряда Фурье по ϑ

Приступая к решению задачи, следует обратить внимание на то, что как искомый магнитный потенциал $u(r, \vartheta, z)$, так и другие величины, характеризующие поле (индукция $\vec{B}$ и напряженность поля $\vec{H}$), должны быть периодическими функциями от координаты ϑ , ибо значениям $\vartheta, \vartheta + 2\pi, \vartheta + 4\pi \dots$ этой координаты соответствует одно и то же сечение рассматриваемого цилиндрического объема и, следовательно, — одни и те же значения величин $u, \vec{B}, \vec{H}$. Таким образом, функции $u(r, \vartheta, z), B(r, \vartheta, z), H(r, \vartheta, z)$ по координате ϑ должны иметь период T , равный 2π .

Если, кроме того, магнитная система ротора машины симметрична относительно любого из полюсов, а обмотка статора выполнена так, что состоит из нескольких совершенно одинаковых (как по конструкции, так и по распределению токов) частей, то тогда картина поля может оказаться повторяющейся не только после обхода полной окружности, но и после обхода ее некоторой части. Иначе говоря, в этом случае период T функций u, B, H будет меньше 2π , и для него можно написать:

$$T = \frac{2\pi}{m}, \quad (III-17)$$

где m — показатель симметрии машины, равный числу одинаковых (симметричных) частей, на которые можно разделить машину вдоль окружности.

Отметим, что в случае применения обмотки с целым числом пазов на полюс и фазу показатель m будет равен числу пар полюсов машины p ; а если число пазов на полюс и фазу является дробным, то m будет меньше p .

В связи с отмеченной периодичностью функции $u(r, \vartheta, z)$ ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$u(r, \vartheta, z) = \frac{1}{2} u_0(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(r, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + v_n(r, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right], \quad (III-18)$$

причем, согласно общим правилам разложения в ряд Фурье, для его коэффициентов $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$ будут иметь место равенства

$$\left. \begin{aligned} u_0(r, z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u(r, \vartheta, z) d\vartheta \\ u_n(r, z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u(r, \vartheta, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ v_n(r, z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u(r, \vartheta, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-18a})$$

где ϑ_0 — произвольный начальный угол.

Будем теперь искать решение краевой задачи (III-11, 16) в виде ряда Фурье (III-18). Для определения входящих в этот ряд функций $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$ воспользуемся, следуя Г. А. Гринбергу [58], следующим приемом. Умножим уравнение (III-18) сначала на величину $\frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$, а затем на величину $\frac{2}{T} \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$ и проинтегрируем полученные равен-

ства по ϑ в пределах от ϑ_0 до $(\vartheta_0 + T)$. Учитывая при этом соотношения (III-18a), после ряда преобразований (см. приложение 1) найдем, что функции $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$ должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям (см. равенства П1-6, 7, 5):

$$\mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right) + \mu_z \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \mu_\vartheta \frac{N_n^2}{r^2} u_n = 0, \quad (\text{III-19a})$$

$$\mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) + \mu_z \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} - \mu_\vartheta \frac{N_n^2}{r^2} v_n = 0, \quad (\text{III-19b})$$

где

$$N = \frac{2n\pi}{T}. \quad (\text{III-19c})$$

Аналогичным образом оперируя с равенствами (III-16), можно получить и граничные условия к уравнениям (III-19a и b) (см. приложение 2). Эти условия будут иметь вид (см. равенства П2-9, 10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} \varphi_{1n}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= -\frac{1}{\mu_z} \psi_{1n}(r) \\ \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} \varphi_{2n}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= -\frac{1}{\mu_z} \psi_{2n}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-20a})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} \chi_{1n}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= -\frac{1}{\mu_z} \omega_{1n}(r) \\ \frac{\partial v_n}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} \chi_{2n}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= -\frac{1}{\mu_z} \omega_{2n}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-20b})$$

где величины $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(r)$ являются коэффициентами Фурье при косинусах, а величины $\chi_n(z)$ и $\omega_n(r)$ — при синусах разложения функций $b_r(\vartheta, z)$ и $b_z(r, \vartheta)$ в ряды Фурье по переменной ϑ (см. формулы (П2-11 и 12)).

Из выражений (III-19a, b и 20a, b) нетрудно заметить, что как дифференциальные уравнения, так и граничные условия для величин $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$ совершенно аналогичны. В связи с этим дальнейшее решение достаточно провести только для одной из указанных величин, например для $u_n(r, z)$, после чего решение для другой величины $v_n(r, z)$ может быть сразу получено путем простой замены обозначений:

$$\left. \begin{aligned} u_n(r, z) &\text{ — на } v_n(r, z) \\ \varphi_{1n}(z) &\text{ — на } \chi_{1n}(z) \\ \varphi_{2n}(z) &\text{ — на } \chi_{2n}(z) \\ \psi_{1n}(r) &\text{ — на } \omega_{1n}(r) \\ \psi_{2n}(r) &\text{ — на } \omega_{2n}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-21})$$

Определение коэффициентов ряда $u_n(r, z)$

Для определения функций $u_n(r, z)$ необходимо решить вторую краевую задачу, описываемую дифференциальным уравнением (III-19a) при граничных условиях (III-20a). С этой целью можно вновь воспользоваться методом Г. А. Гринберга и искать решение $u_n(r, z)$ в виде ряда по собственным функциям данной краевой задачи. Как показано в приложении 3, собственными функциями задачи (III-19a, 20a) по переменной r являются функции

$$Q_k(r) = C_k \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots, \infty), \quad (\text{III-22})$$

где C_k — произвольная постоянная, а величины z_1 и l , являющиеся соответственно координатой левого торца и длиной цилиндра, определяются согласно рис. 75.

Следовательно, разложение решения $u_n(r, z)$ в ряд по функциям (III-22) будет, как известно [58], иметь вид:

$$u_n(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_{nk}(r) \cdot Q_k(z) = \\ = C_0 \bar{u}_{n0}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{u}_{nk}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-23})$$

где

$$\bar{u}_{nk}(r) = \frac{1}{N_k^2} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) Q_k(z) dz = \\ = \frac{C_k}{N_k^2} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz, \quad (\text{III-23a})$$

а величина N_k^2 является квадратом нормы функций $Q_k(z)$ и согласно формуле (ПЗ-9) равна:

$$N_k^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{2} C_k^2 \dots\dots (k \neq 0) \\ l C_0^2 \dots\dots (k = 0) \end{array} \right\}. \quad (\text{III-23b})$$

С целью исключить произвольную постоянную C_k введем обозначения

$$\left. \begin{array}{l} u_{nk}(r) = C_k \bar{u}_{nk}(r) \dots\dots (k \neq 0) \\ u_{n0}(r) = 2C_0 \bar{u}_{n0}(r) \dots\dots (k = 0) \end{array} \right\}. \quad (\text{III-23c})$$

Тогда, учитывая соотношение (III-23b), вместо (III-23 и 23a) будем иметь:

$$u_n(r, z) = \frac{1}{2} u_{n0}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-24})$$

$$u_{nk}(r) = \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz, \quad (\text{III-24a})$$

причем равенство (III-24a) справедливо как при $k \neq 0$, так и при $k=0$.

Итак, будем искать решение уравнения (III-19a) в виде ряда (III-24). Для определения входящих в этот ряд величин $u_{nk}(r)$ воспользуемся, как и ранее, приемом Г. А. Гринберга.

С этой целью умножим уравнение (III-19a) и первую пару граничных условий (III-20a) на величину $\frac{2}{l} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz$ и проинтегрируем полученные равенства по z в пределах от z_1 до z_2 . Принимая во внимание соотношение (III-24a) и используя вторую пару граничных условий (III-20a), после ряда преобразований (см. приложение 4) получим для $u_{nk}(r)$ следующее дифференциальное уравнение (см. равенство П4-5):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) - \left(\kappa_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) u_{nk} = \frac{2}{\mu_r l} [\psi_{2n}(r) \cos k\pi - \psi_{1n}(r)] \quad (\text{III-25})$$

и следующие граничные условия (см. равенства П4-8):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_1} = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{1nk} \\ \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_2} = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{2nk} \end{array} \right\}, \quad (\text{III-26})$$

где (см. равенства П4-4):

$$\left. \begin{array}{l} \kappa_k^2 = \frac{\mu_z}{\mu_r} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \\ \nu_n^2 = \frac{\mu_\phi}{\mu_r} \left(\frac{2n\pi}{l} \right)^2 \end{array} \right\}, \quad (\text{III-27})$$

а величины Φ_{1nk} и Φ_{2nk} являются коэффициентами разложения функций $\psi_{1n}(z)$ и $\psi_{2n}(z)$ в ряды вида (III-24) (см. формулы П4-9 и 10).

Определение коэффициентов ряда $u(r)$

Для решения уравнения (III-25) при граничных условиях (III-26) удобно опять воспользоваться методом Г. А. Гринберга и искать решение в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (III-25, 26), которыми, как показано в приложении 5, являются функции (см. формулу П5-6)

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\nu s}(r) = C_{\nu s} [\nu_{\nu s} J_{\nu}(\lambda_{\nu s} r) - Y_{\nu}(\lambda_{\nu s} r)] \dots\dots (s \neq 0) \\ Q_{\nu 0}(r) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \dots\dots (\nu \neq 0) \\ C_{00} \dots\dots (\nu = 0) \end{array} \right\} \dots\dots (s = 0, \lambda_{\nu 0} = 0) \end{array} \right\}, \quad (\text{III-28})$$

где

$C_{\nu s}$ и C_{00} — произвольные постоянные,
 $J_{\nu}(\lambda_{\nu s} r)$, $Y_{\nu}(\lambda_{\nu s} r)$ — бесселевы функции первого и второго рода,

$\lambda_{vs} = \frac{1}{r_1} \xi_{vs}$, $a \xi_{vs}$ — корни уравнения (П5-9),

v_{vs} — коэффициент, определяемый формулой (П5-7).

Разложение искомого решения $u_{nk}(r)$ в ряд по функциям (П2-28) будет, очевидно, иметь вид [58]:

$$u_{nk}(r) = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{U}_{nks} Q_{vs}(r) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{\infty} \bar{U}_{nks} Q_{vs}(r) \dots\dots (n \neq 0) \\ \bar{U}_{0k0} C_{00} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{U}_0 \end{array} \right\} \quad (\text{П2-29})$$

где

$$\bar{U}_{nks} = \frac{1}{N_{vs}^2} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r u_{nk}(r) Q_{vs}(r) dr, \quad (\text{П2-29a})$$

а величина N_{vs}^2 является квадратом нормы функций $Q_{vs}(r)$ и согласно равенству (П5-26) приложения 5 равна:

$$N_{vs}^2 = \frac{r_1^2}{2} \cdot C_{vs}^2 \cdot \Gamma_{vs}. \quad (\text{П2-29b})$$

Величина Γ_{vs} в этой формуле представляет собой безразмерный коэффициент, определяемый выражением (П5-27).

С целью исключения произвольной постоянной C_{vs} введем обозначения:

$$q_{vs}(r) = \frac{Q_{vs}(r)}{C_{vs}} = \left\{ \begin{array}{l} U_{nks} = C_{vs} \bar{U}_{nks} \\ v \dots\dots - Y_v(\lambda_{vs} r) \dots\dots (s \neq 0) \\ 0 \dots\dots\dots (s=0, v \neq 0) \\ \dots\dots\dots (s=0, v=0) \end{array} \right\} \quad (\text{П2-29c})$$

$$R_{vs}^2 = \Gamma_{vs} r_1^2$$

Тогда, учитывая соотношение (П2-29b), вместо (П2-29 и 29a) будем иметь:

$$u_{nk}(r) = \sum_{s=0}^{\infty} U_{nks} q_{vs}(r) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{\infty} U_{nks} q_{vs}(r) \dots\dots\dots (n \neq 0) \\ U_{0k0} + \sum_{s=1}^{\infty} U_{0ks} q_{0s}(r) \dots\dots\dots (n=0) \end{array} \right\} \quad (\text{П2-30})$$

$$U_{nks} = \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r u_{nk}(r) q_{vs}(r) dr \dots\dots\dots (\text{П2-30a})$$

При этом нетрудно заметить, что функции $q_{vs}(r)$ являются частным случаем функций $Q_{vs}(r)$ при $C_{vs} = 1$. В связи с этим функции $q_{vs}(r)$ обладают, очевидно, теми же свойствами, что и $Q_{vs}(r)$, и в частности для них можно написать (см. равенства П5-1, 2):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 q_{vs}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq_{vs}}{dr} + \left(\lambda_{vs}^2 - \frac{v_n^2}{r^2} \right) q_{vs} = 0 \\ \frac{dq_{vs}}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad \frac{dq_{vs}}{dr} \Big|_{r=r_2} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{П2-31})$$

Будем теперь искать решение граничной задачи (П2-25, 26) в виде ряда (П2-30). Для определения входящих в этот ряд коэффициентов U_{nks} воспользуемся приемом Г. А. Гринберга. Умножим уравнение (П2-25) на величину $\frac{2}{R_{vs}^2} r q_{vs}(r) dr$

и проинтегрируем по r в пределах от r_1 до r_2 . Учитывая при этом равенства (П2-26, 30a, 31), после ряда преобразований получим (см. выражения П6-9 и 8):

$$(\kappa_k^2 + \lambda_{vs}) U_{nks} = A_{vs} \Phi_{1nk} - B_{vs} \Phi_{2nk} + \Psi_{nks}, \quad (\text{П2-32})$$

где

$$\left. \begin{array}{l} A_{vs} = \frac{2}{\mu_r} \frac{r_1}{R_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r_1) \\ B_{vs} = \frac{2}{\mu_r} \frac{r_2}{R_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r_2) \\ \Psi_{nks} = \frac{2}{\mu_r l} (\Psi_{1ns} - \Psi_{2ns} \cos k\pi) \end{array} \right\}, \quad (\text{П2-32a})$$

а Ψ_{1ns} и Ψ_{2ns} — коэффициенты разложения функций $\psi_{1n}(r)$ и $\psi_{2n}(r)$ в ряды по функциям $q_{vs}(r)$ (см. формулы П6-4 и 5).

Из соотношения (П2-32), очевидно, следует:

а) если $(\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2) \neq 0$, то

$$U_{nks} = \frac{A_{vs} \Phi_{1nk} - B_{vs} \Phi_{2nk} + \Psi_{nks}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2}, \quad (\text{П2-33})$$

б) если $(\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2) = 0$, что может быть только в случае $n = k = s = 0$ (см. П2-27, П5-6 и примечание к П5-3),

то:

$$A_{00}\Phi_{100} - B_{00}\Phi_{200} + \Psi_{000} = 0, \quad (\text{III-33a})$$

$$U_{000} - \text{неопределенно (произвольно)}. \quad (\text{III-33b})$$

Подставляя выражения (III-33 и 33b) в равенство (III-30) и замечая, что величины Φ_{1nk} и Φ_{2nk} можно вынести за знак суммы по s , получим искомое решение в виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } n \neq 0: \\ u_{nk}(r) &= \Phi_{1nk} P_{nk}(r) - \Phi_{2nk} R_{nk}(r) + G_{nk}(r) \\ \text{б) } n=0, k \neq 0: \\ u_{0k}(r) &= \Phi_{10k} P_{0k}(r) - \Phi_{20k} R_{0k}(r) + G_{0k}(r) \\ \text{в) } n=0, k=0: \\ u_{00}(r) &= U_{000} + \Phi_{100} P_{00}(r) - \Phi_{200} R_{00}(r) + G_{00}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-34})$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_{nk}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{vs}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r) \\ R_{nk}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{vs}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r) \\ G_{nk}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nks}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r) \\ P_{0k}(r) &= \frac{A_{00}}{\kappa_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{0s}}{\kappa_k^2 + \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ R_{0k}(r) &= \frac{B_{00}}{\kappa_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{0s}}{\kappa_k^2 + \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ G_{0k}(r) &= \frac{\Psi_{0k0}}{\kappa_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Psi_{0ks}}{\kappa_k^2 + \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ P_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{0s}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ R_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{0s}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ G_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Psi_{00s}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-34a})$$

Принцип непрерывности потока и другие виды выражений для $u_{00}(r)$

В равенствах (III-34a) оказалось неиспользованным соотношение (III-33a). Рассмотрим, каков физический смысл этого соотношения. Подставим в него значения величин A_{00} , B_{00} , Ψ_{000} согласно формулам (П₆-8 и 10). Будем, очевидно, иметь:

$$\frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_1}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \Phi_{100} - \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \Phi_{200} + \frac{2}{\mu_r l} (\Psi_{100} - \Psi_{200}) = 0,$$

откуда после умножения на величину

$$\frac{\mu_r}{2} \cdot l \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

получим

$$lr_1 \Phi_{100} - lr_2 \Phi_{200} + (r_2^2 - r_1^2) (\Psi_{100} - \Psi_{200}) = 0. \quad (\text{III-35})$$

Нетрудно показать, что каждый член этого равенства представляет собой величину, пропорциональную магнитному потоку сквозь граничные поверхности рассматриваемого полого цилиндра. Действительно, из выражений (П₆-5), (П₄-10) и (П₂-12) можно заметить, что величины Φ_{100} и Φ_{200} равны учетверенным¹ значениям постоянных составляющих B_{r1} и B_{r2} функций $b_{r1}(\vartheta, z)$ и $b_{r2}(\vartheta, z)$, а величины Ψ_{100} и Ψ_{200} — удвоенным¹ значениям постоянных составляющих B_{z1} и B_{z2} функций $b_{z1}(r, \vartheta)$ и $b_{z2}(r, \vartheta)$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{100} &= 4B_{r1} & \Psi_{100} &= 2B_{z1} \\ \Phi_{200} &= 4B_{r2} & \Psi_{200} &= 2B_{z2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-35a})$$

Далее, поскольку величины B_{r1} и B_{r2} относятся к цилиндрическим поверхностям, площади которых равны соответственно

$$S_{r1} = \pi r_1 l, \quad S_{r2} = \pi r_2 l,$$

и величины B_{z1} и B_{z2} — к торцевым поверхностям цилиндра, площади которых одинаковы и равны

$$S_{z1} = S_{z2} = S_z = \pi (r_2^2 - r_1^2),$$

то, вычисляя магнитные потоки сквозь указанные поверхности и учитывая равенства (III-35a), будем, очевидно, иметь:

¹ Учетверение и удвоение рассматриваемых величин связано с тем обстоятельством, что в рядах (П₄-10) и (П₂-12) перед постоянными членами стоят множители $\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{r1} &= B_{r1} S_{r1} = \frac{1}{2} \pi r_1 l \Phi_{100} \\ \Phi_{r2} &= B_{r2} S_{r2} = \frac{1}{2} \pi r_2 l \Phi_{200} \\ \Phi_{z1} &= B_{z1} S_z = \frac{1}{2} \pi (r_2^2 - r_1^2) \Psi_{100} \\ \Phi_{z2} &= B_{z2} S_z = \frac{1}{2} \pi (r_2^2 - r_1^2) \Psi_{200} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-35b})$$

откуда можно заключить, что члены выражения (III-25) пропорциональны потокам Φ_{r1} , Φ_{r2} , Φ_{z1} , Φ_{z2} , проходящим сквозь граничные поверхности цилиндра. Подставляя (III-35b) в (III-35), получим

$$\Phi_{r1} - \Phi_{r2} + \Phi_{z1} - \Phi_{z2} = 0. \quad (\text{III-35c})$$

Обратив теперь внимание на то, что согласно рис. 75 потоки Φ_{r1} и Φ_{z1} являются входящими, а потоки Φ_{r2} и Φ_{z2} — выходящими из рассматриваемого цилиндра, можно выяснить физический смысл равенств (III-35c и 35): сумма входящих в цилиндр потоков равна сумме потоков, выходящих из него. Это положение является, как известно, интегральной формой фундаментального в электротехнике условия непрерывности магнитного потока. Именно это условие и выражают собой равенства (III-35c, 35, 33a).

Заметим, что появление этого условия в решении нашей задачи вполне естественно и с математической точки зрения, ибо уже одно из исходных уравнений (III-8), а именно, уравнение

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{III-35d})$$

представляло собой условие непрерывности магнитного потока, выраженное, правда, в дифференциальной форме. В этой связи соотношение (III-33a) можно рассматривать как следствие уравнения (III-35d), как его частный случай, явившийся результатом процесса интегрирования.

Как нетрудно заметить, соотношение (III-33a) взаимно связывает между собой величины Φ_{100} , Φ_{200} , Ψ_{100} , Ψ_{200} и, следовательно, из этих величин только три могут быть заданы произвольно, а четвертая должна быть определена по выражению (III-33a). Эту связь можно использовать для преобразования выражения для $U_{00}(r)$ (см. третье равенство III-34) к двум новым видам, которые могут оказаться более удобными для расчетов. Действительно, если согласно (III-33a) и (II-10) написать

$$\begin{aligned} \Phi_{200} &= \frac{A_{00}}{B_{00}} \Phi_{100} + \frac{1}{B_{00}} \Psi_{000} = \frac{r_1}{r_2} \Phi_{100} + \frac{1}{B_{00}} \Psi_{000}, \\ \Phi_{100} &= \frac{B_{00}}{A_{00}} \Phi_{200} - \frac{1}{A_{00}} \Psi_{000} = \frac{r_2}{r_1} \Phi_{200} - \frac{1}{A_{00}} \Psi_{000} \end{aligned}$$

и подставить эти равенства последовательно в третье уравнение (III-34), то получим

а) при исключенном Φ_{200} :

$$u_{00}(r) = U_{000} + \Phi_{100} \cdot p_{00}(r) + g_{00}(r), \quad (\text{III-36a})$$

б) при исключенном Φ_{100} :

$$u_{00}(r) = U_{000} + \Phi_{200} \frac{r_2}{r_1} \cdot p_{00}(r) + h_{00}(r), \quad (\text{III-36b})$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_{00}(r) &= P_{00}(r) - \frac{r_1}{r_2} R_{00}(r) \\ g_{00}(r) &= -\frac{\Psi_{000}}{B_{00}} R_{00}(r) + G_{00}(r) \\ h_{00}(r) &= -\frac{\Psi_{000}}{A_{00}} P_{00}(r) + G_{00}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-36c})$$

Таким образом, в равенствах (III-34, 34a и 36a, b, c) оказались использованными все соотношения (III-33, 33a, b), которые были получены в результате интегрирования уравнения (III-25). Равенства (III-34, 34a и 36a, b, c) дают, следовательно, полное решение поставленной краевой задачи.

Представление решения через функции Бесселя

$I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$

Полученное выше решение задачи в виде равенств (III-34, 34a) обладает тем недостатком, что входящие в него функции $P_{00}(r)$, $R_{00}(r)$ и $p_{00}(r)$, будучи независимыми от граничных условий, выражаются в то же время через довольно сложные ряды (см. III-34a).

С целью упрощения этих выражений рассмотрим решение нашей задачи в одном частном случае, когда сквозь торцы цилиндра $z = z_1$ и $z = z_2$ магнитный поток совершенно не проходит. Это, очевидно, означает, что нормальная составляющая индукции на торцах B_z тождественно равна нулю, и согласно равенствам (III-10a, 16) и (II-11) следует написать:

$$\left. \begin{aligned} B_z \Big|_{z=z_1} &= -\mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = 0 \dots b_{z1}(r, \vartheta) = 0 \dots \psi_{1n}(r) = 0 \\ B_z \Big|_{z=z_2} &= -\mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = 0 \dots b_{z2}(r, \vartheta) = 0 \dots \psi_{2n}(r) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-37a})$$

Подставляя этот результат в дифференциальное уравнение (III-25) и раскрывая в нем первый член левой части, будем иметь:

$$\frac{d^2 u_{nk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{nk}}{dr} - \left(\kappa_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) u_{nk} = 0. \quad (\text{III-37})$$

Что же касается граничных условий (III-26), то они останутся без изменения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{1nk} \\ \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{2nk} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-38a})$$

Подставляя (III-37a) в соотношения (П6-4, 8), (III-34a и 36c), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1ns} &= 0 \\ \Psi_{2ns} &= 0 \end{aligned} \right\} \Psi_{nks} = 0 \dots G_{nk}(r) = 0 \dots g_{00}(r) = h_{00}(r) = 0. \quad (\text{III-38b})$$

В связи с этим решение краевой задачи (III-37, 38a) будет согласно (III-34, 36a, b) иметь вид:

а) n и k — любые, кроме $n = k = 0$:

$$u_{nk}(r) = \Phi_{1nk} P_{nk}(r) - \Phi_{2nk} R_{nk}(r), \quad (\text{III-39a})$$

б) $n = k = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u_{00}(r) &= U_{000} + \Phi_{100} p_{00}(r) \\ u_{00}(r) &= U_{000} + \Phi_{200} \frac{r_2}{r_1} p_{00}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-39b})$$

где в соответствии с (III-34a и 36c)

$$\left. \begin{aligned} P_{nk}(r) &= \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{vs}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} q_{vs}(r) \dots \dots \dots (n \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \frac{A_{00}}{\kappa_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{0s}}{\kappa_k^2 + \lambda_{0s}^2} q_{0s}(r) \dots (n = 0) \right] \\ R_{nk}(r) &= \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{vs}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} q_{vs}(r) \dots \dots \dots (n \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \frac{B_{00}}{\kappa_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{0s}}{\kappa_k^2 + \lambda_{0s}^2} q_{0s}(r) \dots (n = 0) \right] \\ p_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{0s} - \frac{r_1}{r_2} B_{0s}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-39c})$$

и, кроме того, согласно (III-35, 38b) должно выполняться равенство

$$r_1 \Phi_{100} - r_2 \Phi_{200} = 0. \quad (\text{III-39d})$$

С другой стороны, поскольку уравнение (III-37) является, как легко заметить, уравнением Бесселя, то его решение можно, очевидно, получить и непосредственно, не пользуясь разложением по собственным функциям. Как показывают вычисления, это решение имеет вид (см. формулы П7-4):

а) n, k — любые, кроме $n = k = 0$:

$$u_{nk}(r) = \Phi_{1nk} P_{nk}^{\circ}(r) - \Phi_{2nk} R_{nk}^{\circ}(r), \quad - \quad (\text{III-40a})$$

б) $n = k = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u_{00}(r) &= B_{00} - \Phi_{100} p_{00}^{\circ}(r) \\ u_{00}(r) &= B_{00} - \Phi_{200} \frac{r_2}{r_1} p_{00}^{\circ}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-40b})$$

где (см. формулы П7-5)

$$\left. \begin{aligned} P_{nk}^{\circ}(r) &= \left[\frac{1}{\mu_r \kappa_k} \cdot \frac{I'_{\nu}(\kappa_k r_2) K_{\nu}(\kappa_k r) - K'_{\nu}(\kappa_k r_2) I_{\nu}(\kappa_k r)}{I'_{\nu}(\kappa_k r_1) K'_{\nu}(\kappa_k r_2) - I'_{\nu}(\kappa_k r_2) K'_{\nu}(\kappa_k r_1)} \dots (k \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \frac{r_1}{\mu_r \nu} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\nu} + \left(\frac{r_2}{r}\right)^{\nu}}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\nu} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\nu}} \dots \dots \dots \left(\begin{matrix} k=0 \\ n \neq 0 \end{matrix} \right) \right] \\ R_{nk}^{\circ}(r) &= \left[\frac{1}{\mu_r \kappa_k} \cdot \frac{I_{\nu}^1(\kappa_k r_1) K_{\nu}(\kappa_k r) - K'_{\nu}(\kappa_k r_1) I_{\nu}(\kappa_k r)}{I'_{\nu}(\kappa_k r_1) K'_{\nu}(\kappa_k r_2) - I'_{\nu}(\kappa_k r_2) K'_{\nu}(\kappa_k r_1)} \dots (k \neq 0) \right. \\ &\quad \left. \frac{r_2}{\mu_r \nu} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\nu} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\nu}}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\nu} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\nu}} \dots \dots \dots \left(\begin{matrix} k=0 \\ n \neq 0 \end{matrix} \right) \right] \\ p_{00}^{\circ}(r) &= \frac{r_1}{\mu_r} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right); B_{00} - \text{произвольная постоянная} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-40c})$$

причем $I_{\nu}(\kappa_k r)$ и $K_{\nu}(\kappa_k r)$ — видоизмененные функции Бесселя первого и второго рода.

Сравнивая равенства (III-40a) и (III-39a) и замечая, что эти равенства должны быть идентичны при любых значениях Φ_{1nk} и Φ_{2nk} , получим:

$$P_{nk}(r) = P_{nk}^{\circ}(r); R_{nk}(r) = R_{nk}^{\circ}(r). \quad (\text{III-41a})$$

Несколько иные результаты дает сравнение равенств (III-40b) и (III-39b). Ввиду того что в эти равенства входят произвольные постоянные U_{000} и B_{00} , величины $p_{00}(r)$ и $p_{00}^{\circ}(r)$

также могут отличаться на некоторую постоянную C_{00} и поэтому следует написать:

$$p_{00}(r) = -p_{00}^{\circ}(r) + C_{00}. \quad (\text{III-41b})$$

Величину C_{00} можно найти путем разложения функции $p_{00}^{\circ}(r)$ в ряд по функциям $q_{0s}(r)$ и сравнения его с аналогичным рядом для $p_{00}(r)$ (см. формулы (III-39c)). Такое сравнение дает (см. формулу (II-8)):

$$C_{00} = \frac{r_1}{\mu_r} \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right) - r_1^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (\text{III-41c})$$

Подставляя в равенство (III-41b) выражения для $p_{00}^{\circ}(r)$ и C_{00} , после преобразований будем иметь:

$$p_{00}(r) = \frac{r_1}{\mu_r} \cdot \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r} - \frac{1}{2} \right) - r_1^2 \left(\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (\text{III-41})$$

Подведение итогов решения типовой задачи

Согласно изложенному выше, решение поставленной краевой задачи (III-10, 16) имеет вид ряда Фурье (III-18):

$$u(r, \vartheta, z) = \frac{1}{2} u_0(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(r, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + v_n(r, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right], \quad (\text{III-42a})$$

для коэффициентов $u_n(r, z)$ которого согласно выражению (III-24) было найдено:

$$u_n(r, z) = \frac{1}{2} u_{n0}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-42b})$$

причем в соответствии с выражениями (III-34, 36a и b) для величин $u_{nk}(r)$ имеют место равенства

а) n, k — любые, кроме $n=k=0$:

$$u_{nk}(r) = \Phi_{1nk} P_{nk}(r) - \Phi_{2nk} P_{nk}(r) + G_{nk}(r), \quad (\text{III-42c})$$

б) $n=k=0$:

$$\left. \begin{aligned} u_{00}(r) &= U_{000} + \Phi_{100} p_{00}(r) + g_{00}(r) \\ u_{00}(r) &= U_{000} + \Phi_{200} \frac{r_2}{r_1} p_{00}(r) + h_{00}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-42d})$$

или

В этих выражениях

Φ_{1nk} и Φ_{2nk} — коэффициенты разложения пограничных функций $b_{r1}(\vartheta, z)$ и $b_{r2}(\vartheta, z)$ в двойные ряды (II-12), (II-10),

U_{000} — произвольная постоянная,

а функции $P_{nk}(r)$, $R_{nk}(r)$, $p_{00}(r)$, $G_{nk}(r)$, $g_{00}(r)$, $h_{00}(r)$, согласно равенствам (II-41a, 40c, 41d, 34a и 36c) имеют вид:

$$P_{nk}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_r \mu_k} \cdot \frac{I'_v(x_k r_2) K_v(x_k r) - K'_v(x_k r_2) I_v(x_k r)}{I'_v(x_k r_1) K'_v(x_k r_2) - I'_v(x_k r_2) K'_v(x_k r_1)} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{r_1}{\mu_r} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^v + \left(\frac{r_2}{r}\right)^v}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^v - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^v} \dots (k=0) \\ &\dots \dots \dots (n \neq 0) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-42e})$$

$$R_{nk}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mu_r \mu_k} \cdot \frac{I'_v(x_k r_1) K_v(x_k r) - K'_v(x_k r_1) I_v(x_k r)}{I'_v(x_k r_1) K'_v(x_k r_2) - I'_v(x_k r_2) K'_v(x_k r_1)} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{r_2}{\mu_r} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^v + \left(\frac{r_1}{r}\right)^v}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^v - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^v} \dots (k=0) \\ &\dots \dots \dots (n \neq 0) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-42f})$$

$$p_{00}(r) = \frac{r_1}{\mu_r} \cdot \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r} - \frac{1}{2} \right) + r_1^2 \left(\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (\text{III-42g})$$

$$\left. \begin{aligned} G_{nk}(r) &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{nk,s}}{x_k^2 + \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \dots \dots \dots (n \neq 0) \\ &\frac{\mu_{000}}{x_k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{0ks}}{x_k^2 + \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \dots \dots \dots (n=0) \\ &\dots \dots \dots (k \neq 0) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-42h}) \\ R_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{00s}}{\lambda_{0s}^2} - \frac{\alpha_{00} q_{0s}(r_2) \cdot \mu_{000}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \\ h_{00}(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu_{00s}}{\lambda_{0s}^2} - \frac{\alpha_{0s} q_{0s}(r_1) \cdot \mu_{000}}{\lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \end{aligned} \right\}$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_n^2 &= \frac{\mu_\theta}{\mu_r} \left(\frac{2n\pi}{T} \right)^2 \\ \kappa_k^2 &= \frac{\mu_z}{\mu_r} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \\ \alpha_{0s} &= \frac{R_{00}^2}{R_{0s}^2} = \frac{r_{00}}{r_{0s}} \\ \lambda_{vs} &= \frac{1}{r_1} \xi_{vs} \\ q_{vs}(r) &= v_{vs} J_v(\lambda_{vs} r) - Y_v(\lambda_{vs} r) \\ v_{vs} &= \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_1)}{J'_v(\lambda_{vs} r_1)} - \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_2)}{J'_v(\lambda_{vs} r_2)} \\ \Psi_{nks} &= \frac{2}{\mu_r l} (\Psi_{1ns} - \Psi_{2ns} \cos k\pi) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-42i})$$

а величины Ψ_{1ns} и Ψ_{2ns} являются коэффициентами разложения пограничных функций $b_{z1}(r, \theta)$ и $b_{z2}(r, \theta)$ в двойные ряды (П₂-12), (П₆-5).

Для коэффициентов $v_n(r, z)$ ряда (III-42a) согласно соотношению (III-21) по аналогии с (III-42b и c) и, имея в виду, что в этом случае $n \neq 0$, можно написать:

$$v_n(r, z) = \frac{1}{2} v_{n0}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-42j})$$

$$v_{nk}(r) = X_{1nk} P_{nk}(r) - X_{2nk} R_{nk}(r) + H_{nk}(r), \quad (\text{III-42k})$$

где

X_{1nk} и X_{2nk} — коэффициенты разложения пограничных функций $b_{r1}(\theta, z)$ и $b_{r2}(\theta, z)$ в двойные ряды (П₂-12), (П₄-11),

а для функции $H_{nk}(r)$ по аналогии с (III-42h):

$$H_{nk}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Omega_{nks}}{\kappa_k^2 + \lambda_{vs}^2} \cdot q_{vs}(r), \quad (\text{III-42l})$$

причем

$$\Omega_{nks} = \frac{2}{\mu_r l} (\Omega_{1ns} - \Omega_{2ns} \cos k\pi), \quad (\text{III-42m})$$

а Ω_{1ns} и Ω_{2ns} — коэффициенты разложения пограничных функций $b_{z1}(r, \theta)$ и $b_{z2}(r, \theta)$ в двойные ряды (П₂-12), (П₆-6).

Таким образом, краевая задача (III-10, 16) полностью решена, и остается только применить это решение к отдельным участкам статора.

В ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ К ОТДЕЛЬНЫМ СТАТОРНЫМ УЧАСТКАМ

Поскольку все три статорных участка имеют общий период T и одинаковую длину l , то полученные в § 4 выражения (III-42 a, b, j) для скалярного магнитного потенциала $u(r, \theta, z)$ будут, очевидно, справедливы для любого (i -го) участка статора и можно, следовательно, написать:

$$\left. \begin{aligned} u^{(i)}(r, \theta, z) &= \frac{1}{2} u_n^{(i)}(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n^{(i)}(r, z) \cos \frac{2n\pi\theta}{T} + v_n^{(i)}(r, z) \sin \frac{2n\pi\theta}{T} \right] \\ u_n^{(i)}(r, z) &= \frac{1}{2} u_{nn}^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}^{(i)}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \\ v_n^{(i)}(r, z) &= \frac{1}{2} v_{nn}^{(i)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}^{(i)}(r) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-43})$$

Однако исходящие из этих равенства величины $u_{nk}^{(i)}(r)$ и $v_{nk}^{(i)}(r)$ уже не будут иметь одинаковых выражений, ибо в них должны отражаться особенности и свойства каждого из участков. Учитывая эти особенности с помощью рис. 75, таблицы 1 и формул (III-10a, b, c) и вводя еще величины $\Phi_{nk}^{(2)}$, $X_{nk}^{(2)}$, $\Phi_{nk}^{(3)}$, $X_{nk}^{(3)}$, $\Phi_{nk}^{(4)}$, $X_{nk}^{(4)}$, обозначающие коэффициенты разложения функций $b_2(\theta, z)$, $b_3(\theta, z)$, $b_4(\theta, z)$ в двойные ряды вида (П₂-12), (П₄-10), можно написать:

1) для статорной (I)

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} r_1^{(1)} &= R_1 \\ r_2^{(1)} &= R_1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} v_1^{(1)} &= v_2^{(1)} = v_3^{(1)} = v_4^{(1)} \\ v_\theta^{(1)} &= v_z^{(1)} = v_1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} b_1^{(1)}(\theta, z) &= b_2(\theta, z) \\ b_2^{(1)}(\theta, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \Phi_{1nk}^{(1)} &= \Phi_{nk}^{(2)} \\ \Phi_{v1nk}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} X_{1nk}^{(1)} &= X_{nk}^{(2)} \\ X_{2nk}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Phi_{00}^{(2)} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_2 l} (\Psi_{200} - \Psi_{100}) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-44a})$$

2) для спинки статора (2)

$$\left. \begin{aligned} r_1^{(2)} = R_3 \quad \mu_r^{(2)} = \mu_{\vartheta}^{(2)} = \mu_2 \quad b_{r1}^{(2)}(\vartheta, z) = b_3(\vartheta, z) \\ r_2^{(2)} = R_2 \quad \mu_z^{(2)} = \mu_{2z} \quad b_{r2}^{(2)}(\vartheta, z) = b_2(\vartheta, z) \\ \Phi_{1nk}^{(2)} = \Phi_{nk}^{(3)} \quad X_{1nk}^{(2)} = X_{nk}^{(3)} \\ \Phi_{2nk}^{(2)} = \Phi_{nk}^{(2)} \quad X_{2nk}^{(2)} = X_{nk}^{(2)} \quad \Phi_{00}^{(3)} = \frac{R_2}{R_3} \Phi_{00}^{(2)} \\ b_{z1}^{(2)}(r, \vartheta) = b_{z2}^{(2)}(r, \vartheta) = 0, \quad G_{nk}^{(2)}(r) = H_{nk}^{(2)}(r) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (III-44b)$$

3) для зубцов статора (3)

$$\left. \begin{aligned} r_1^{(3)} = R_4 \quad \mu_r^{(3)} = \mu_3, \quad \mu_{\vartheta}^{(3)} = \mu_{3\vartheta} \quad b_{r1}^{(3)}(\vartheta, z) = b_4(\vartheta, z) \\ r_2^{(3)} = R_3 \quad \mu_z^{(3)} = \mu_{3z} \quad b_{r2}^{(3)}(\vartheta, z) = b_3(\vartheta, z) \\ \Phi_{1nk}^{(3)} = \Phi_{nk}^{(4)} \quad X_{1nk}^{(3)} = X_{nk}^{(4)} \\ \Phi_{2nk}^{(3)} = \Phi_{nk}^{(3)} \quad X_{2nk}^{(3)} = X_{nk}^{(3)} \quad \Phi_{00}^{(4)} = \frac{R_3}{R_4} \Phi_{00}^{(3)} \\ b_{z1}^{(3)}(r, \vartheta) = b_{z2}^{(3)}(r, \vartheta) = 0, \quad G_{nk}^{(3)}(r) = H_{nk}^{(3)}(r) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (III-44c)$$

Подставляя все эти данные в равенства (III-42c, d, k), получим следующие выражения для коэффициентов $u_{nk}^{(i)}(r)$ и $v_{nk}^{(i)}(r)$ рядов (III-43):

1) для станины ($i = 1$)

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^{(1)}(r) &= \Phi_{nk}^{(2)} P_{nk}^{(1)}(r) + G_{nk}^{(1)}(r) \\ u_{00}^{(1)}(r) &= U_{00}^{(1)} + h_{00}^{(1)}(r) \\ v_{nk}^{(1)}(r) &= X_{nk}^{(2)} P_{nk}^{(1)}(r) + H_{nk}^{(1)}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (III-45a)$$

2) для спинки статора ($i = 2$)

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^{(2)}(r) &= \Phi_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(r) - \Phi_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(r) \\ u_{00}^{(2)}(r) &= U_{00}^{(2)} + \Phi_{00}^{(3)} p_{00}^{(2)}(r) \\ v_{nk}^{(2)}(r) &= X_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(r) - X_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (III-45b)$$

3) для зубцового слоя ($i = 3$)

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^{(3)}(r) &= \Phi_{nk}^{(4)} P_{nk}^{(3)}(r) - \Phi_{nk}^{(3)} R_{nk}^{(3)}(r) \\ u_{00}^{(3)}(r) &= U_{00}^{(3)} + \Phi_{00}^{(4)} p_{00}^{(3)}(r) \\ v_{nk}^{(3)}(r) &= X_{nk}^{(4)} P_{nk}^{(3)}(r) - X_{nk}^{(3)} R_{nk}^{(3)}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (III-45c)$$

где через $P_{nk}^{(i)}(r)$, $R_{nk}^{(i)}(r)$, $p_{00}^{(i)}(r)$, $h_{00}^{(i)}(r)$, $G_{nk}^{(i)}(r)$, $H_{nk}^{(i)}(r)$ обозначены функции (III-42e, f, g, h) применительно к i -му участку с учетом всех его особенностей (см. приложение 9).

Помимо формул (III-45a, b, c), необходимо еще учесть условие непрерывности потока (III-35), которое согласно (III-44a, b, c) дает:

$$\Phi_{00}^{(4)} = \frac{R_3}{R_4} \Phi_{00}^{(3)} = \frac{R_2}{R_4} \Phi_{00}^{(2)} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_4 l} (\Psi_{200} - \Psi_{100}). \quad (III-45d)$$

Теперь можно использовать условия (III-14), относящиеся к границам между участками. Подставив в эти условия ряды для $u^{(i)}(r, \vartheta, z)$ (первое равенство III-43) и сравнивая различные гармоники, очевидно, получим:

а) из первого условия (III-14)

$$\left. \begin{aligned} u_{00}^{(1)}(R_2, z) &= u_{00}^{(2)}(R_2, z) + C_2 \\ u_n^{(1)}(R_2, z) &= u_n^{(2)}(R_2, z) \\ v_n^{(1)}(R_2, z) &= v_n^{(2)}(R_2, z) \end{aligned} \right\}, \quad (III-46a)$$

б) из второго условия (III-14)

$$\left. \begin{aligned} u_{00}^{(2)}(R_3, z) &= u_{00}^{(3)}(R_3, z) + C_3 \\ u_n^{(2)}(R_3, z) &= u_n^{(3)}(R_3, z) \\ v_n^{(2)}(R_3, z) &= v_n^{(3)}(R_3, z) \end{aligned} \right\}, \quad (III-46b)$$

Подставляя далее в условия (III-46a и b) соответствующие ряды для $u_n^{(i)}(r, z)$ и $v_n^{(i)}(r, z)$ (второе и третье равенства III-43), будем иметь:

а) вместо (III-46a)

$$\left. \begin{aligned} u_{00}^{(1)}(R_2) &= u_{00}^{(2)}(R_2) + C_2 \\ u_n^{(1)}(R_2) &= u_n^{(2)}(R_2) \\ v_n^{(1)}(R_2) &= v_n^{(2)}(R_2) \end{aligned} \right\}, \quad (III-47a)$$

б) вместо (III-46b)

$$\left. \begin{aligned} u_{00}^{(2)}(R_3) &= u_{00}^{(3)}(R_3) + C_3 \\ u_n^{(2)}(R_3) &= u_n^{(3)}(R_3) \\ v_n^{(2)}(R_3) &= v_n^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}, \quad (III-47b)$$

Наконец, подставляя в (III-47a и b) равенства (III-45a, b, c) и перегруппировывая получающиеся условия, найдем окончательно:

а) для $n = k = 0$

$$\left. \begin{aligned} U_{00}^{(1)} + h_{00}^{(1)}(R_2) &= U_{00}^{(2)} + C_2 + \Phi_{00}^{(3)} p_{00}^{(2)}(R_2) \\ U_{00}^{(2)} + \Phi_{00}^{(3)} p_{00}^{(2)}(R_3) &= U_{00}^{(3)} + C_3 + \Phi_{00}^{(4)} p_{00}^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-48a})$$

б) для остальных случаев

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{nk}^{(2)} P_{nk}^{(1)}(R_2) + G_{nk}^{(1)}(R_2) &= \Phi_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(R_2) - \Phi_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(R_2) \\ \Phi_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(R_3) - \Phi_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(R_3) &= \Phi_{nk}^{(4)} P_{nk}^{(3)}(R_3) - \Phi_{nk}^{(3)} R_{nk}^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-48b})$$

$$\left. \begin{aligned} X_{nk}^{(2)} P_{nk}^{(1)}(R_2) + H_{nk}^{(1)}(R_2) &= X_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(R_2) - X_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(R_2) \\ X_{nk}^{(3)} P_{nk}^{(2)}(R_3) - X_{nk}^{(2)} R_{nk}^{(2)}(R_3) &= X_{nk}^{(4)} P_{nk}^{(3)}(R_3) - X_{nk}^{(3)} R_{nk}^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-48c})$$

В равенствах (III-48a) всегда можно произвольные постоянные C_2 и C_3 выбрать таким образом, чтобы

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= h_{00}^{(1)}(R_2) - \Phi_{00}^{(3)} p_{00}^{(2)}(R_2) \\ C_3 &= \Phi_{00}^{(3)} p_{00}^{(2)}(R_3) - \Phi_{00}^{(4)} p_{00}^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}.$$

Тогда вместо равенств (III-48a), очевидно, будем иметь:

$$U_{00}^{(1)} = U_{00}^{(2)} = U_{00}^{(3)} = U_0. \quad (\text{III-48d})$$

Равенства (III-48b, c) можно использовать для определения величин $\Phi_{nk}^{(2)}$, $\Phi_{nk}^{(3)}$, $X_{nk}^{(2)}$ и $X_{nk}^{(3)}$, которые относятся к границам между участками (1), (2) и (3) и являются поэтому неизвестными. Из (III-48b) имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_{nk}^{(2)}(R_2) \cdot \Phi_{nk}^{(3)} - [P_{nk}^{(1)}(R_2) + R_{nk}^{(2)}(R_2)] \Phi_{nk}^{(2)} &= G_{nk}^{(1)}(R_2) \\ [P_{nk}^{(2)}(R_3) + R_{nk}^{(3)}(R_3)] \Phi_{nk}^{(3)} - R_{nk}^{(2)}(R_3) \cdot \Phi_{nk}^{(2)} &= P_{nk}^{(3)}(R_3) \Phi_{nk}^{(4)} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-49a})$$

Решая эти уравнения относительно $\Phi_{nk}^{(2)}$ и $\Phi_{nk}^{(3)}$, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{nk}^{(2)} &= e_{nk}^{(2)} \cdot \Phi_{nk}^{(4)} - F_{nk}^{(2)} G_{nk}^{(1)}(R_2) \\ \Phi_{nk}^{(3)} &= e_{nk}^{(3)} \cdot \Phi_{nk}^{(4)} - F_{nk}^{(3)} G_{nk}^{(1)}(R_2) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-49b})$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_{nk}^{(2)} &= \frac{P_{nk}^{(2)}(R_2) \cdot P_{nk}^{(3)}(R_3)}{D_{nk}}; \quad F_{nk}^{(2)} = \frac{P_{nk}^{(2)}(R_3) + R_{nk}^{(3)}(R_3)}{D_{nk}} \\ e_{nk}^{(3)} &= \frac{P_{nk}^{(1)}(R_2) + R_{nk}^{(2)}(R_2)}{D_{nk}} \cdot P_{nk}^{(3)}(R_3); \quad F_{nk}^{(3)} = \frac{R_{nk}^{(2)}(R_3)}{D_{nk}} \\ D_{nk} &= [P_{nk}^{(1)}(R_2) + R_{nk}^{(2)}(R_2)] \cdot [P_{nk}^{(2)}(R_3) + R_{nk}^{(3)}(R_3)] - \\ &\quad - P_{nk}^{(2)}(R_2) \cdot R_{nk}^{(3)}(R_3) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-49c})$$

Аналогичным путем из выражений (III-48c) получим:

$$\left. \begin{aligned} X_{nk}^{(2)} &= e_{nk}^{(2)} X_{nk}^{(4)} - F_{nk}^{(2)} \cdot H_{nk}^{(1)}(R_2) \\ X_{nk}^{(3)} &= e_{nk}^{(3)} X_{nk}^{(4)} - F_{nk}^{(3)} \cdot H_{nk}^{(1)}(R_2) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-49d})$$

Формулы (III-49b, d) дают искомую зависимость коэффициентов $\Phi_{nk}^{(2)}$, $X_{nk}^{(2)}$, $\Phi_{nk}^{(3)}$, $X_{nk}^{(3)}$, характеризующих распределение индукции на пограничных между участками поверхностях, от коэффициентов $\Phi_{nk}^{(4)}$, $G_{nk}^{(1)}(R_2)$ и $X_{nk}^{(4)}$, $H_{nk}^{(1)}(R_2)$, относящихся к условно заданным функциям распределения индукции по поверхности расточки статора и по торцовым сечениям станины. Тем самым формулы (III-49b, d) дают возможность для каждого из участков определить недостающие граничные условия и, следовательно, получить для этих участков полное решение задачи в виде рядов (III-43) с коэффициентами $u_{nk}^{(i)}(r)$ и $v_{nk}^{(i)}(r)$, вычисляемыми по формулам (III-45a, b, c).

Для дальнейшего наибольший интерес представляет выражение для скалярного магнитного потенциала на поверхности расточки статора, т. е. при $r = R_4$. Пользуясь для этой цели формулами (III-45c, 48d и 49b, d), нетрудно получить следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u_{00}^{(3)}(R_4) &= U_0 + E_{00}^{(3)} \Phi_{00}^{(4)} \\ u_{nk}^{(3)}(R_4) &= E_{nk}^{(3)} \Phi_{nk}^{(4)} + f_{nk}^{(3)} \cdot G_{nk}^{(1)}(R_2) \\ v_{nk}^{(3)}(R_4) &= E_{nk}^{(3)} X_{nk}^{(4)} + f_{nk}^{(3)} \cdot H_{nk}^{(1)}(R_2) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-50})$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_{00}^{(3)} &= p_{00}^{(3)}(R_4) \\ E_{nk}^{(3)} &= P_{nk}^{(3)}(R_4) - e_{nk}^{(3)} \cdot R_{nk}^{(3)}(R_4) \\ f_{nk}^{(3)} &= F_{nk}^{(3)} \cdot R_{nk}^{(3)}(R_4) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-50a})$$

Выражения (III-50) дают зависимость между индукцией и магнитным потенциалом на поверхности расточки статора, которая должна иметь место в связи с определенными свойствами статорных участков — зубцов, спинки и станины. Эти свойства характеризуются коэффициентами $E_{nk}^{(3)}$ и $f_{nk}^{(3)}$, которые, как видно из формул (III-50a, 49c и 42e, f), зависят только от геометрических размеров и магнитных проницаемостей материала участков и поэтому остаются постоянными при любых распределениях индукции и потенциала по поверхности расточки.

Получение выражений (III-50) вместе с (III-43) означает окончание первого этапа исследования поля в статоре и воз-

душном зазоре машины с когтеобразными полюсами, ибо эти формулы вполне определяют ту искомую зависимость между индукцией и потенциалом на внутренней поверхности статора, которую согласно сказанному в конце § 1 требовалось найти на первом этапе исследований. Однако формулы (III-50) еще не учитывают наличия электрических токов в обмотке статора. Этот учет, согласно равенству (III-15f), может быть сведен к простому добавлению тока в обмотке статора $i(\vartheta, z)$ к потенциалу $u^{(3)}(R_4, \vartheta, z)$ на поверхности расточки статора, вычисляемому с помощью соотношений (III-50). Так как потенциал $u^{(3)}(R_4, \vartheta, z)$ согласно изложенному выражается с помощью тригонометрических рядов вида (III-43), то и функцию $i(\vartheta, z)$ целесообразно представить в виде аналогичных рядов:

$$\left. \begin{aligned} i(\vartheta, z) &= \frac{1}{2} i_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[i_n(z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + j_n(z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] \\ i_n(z) &= \frac{1}{2} I_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} I_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \\ j_n(z) &= \frac{1}{2} J_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} J_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-51})$$

причем, как и обычно,

$$\left. \begin{aligned} i_n(z) &= \frac{2}{T} \int_0^T i(\vartheta, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ j_n(z) &= \frac{2}{T} \int_0^T i(\vartheta, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ I_{nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} i_n(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \\ J_{nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} j_n(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-51a})$$

Тогда, подставляя в условие (III-15f) выражения (III-43 и 51) и сравнивая соответствующие коэффициенты рядов, в итоге найдем:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^{(4)}(R_4) &= u_{nk}^{(3)}(R_4) + I_{nk} \\ v_{nk}^{(4)}(R_4) &= v_{nk}^{(3)}(R_4) + J_{nk} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III-52})$$

Подставляя в эти равенства выражения (III-50), получим полные формулы для гармоник потенциала на поверхности расточки статора с учетом действия токов в статорной обмотке.

С целью некоторого упрощения в записи окончательных формул целесообразно условно обозначить:

$$\left. \begin{aligned} u(\vartheta, z) &= u^{(4)}(R_4, \vartheta, z) \\ u_n(z) &= u_n^{(4)}(R_4, z) \\ v_n(z) &= v_n^{(4)}(R_4, z) \\ u_{nk} &= u_{nk}^{(4)}(R_4) \\ v_{nk} &= v_{nk}^{(4)}(R_4) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-53})$$

и, кроме того, опустить верхние индексы у величин в формулах (III-50). Тогда выражение для потенциала на поверхности расточки статора согласно равенствам (III-43, 50, 52 и 53) примет следующий вид:

$$u(\vartheta, z) = \frac{1}{2} u_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + v_n(z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right], \quad (\text{III-54})$$

$$u_n(z) = \frac{1}{2} u_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-55a})$$

$$v_n(z) = \frac{1}{2} v_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l}, \quad (\text{III-55b})$$

$$\left. \begin{aligned} u_{00} &= U_0 + E_{00} \Phi_{00} + I_{00} \\ u_{nk} &= E_{nk} \Phi_{nk} + f_{nk} G_{nk}(R_2) + I_{nk} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III-56a})$$

$$v_{nk} = E_{nk} X_{nk} + f_{nk} H_{nk}(R_2) + J_{nk}, \quad (\text{III-56b})$$

причем параметры E_{nk} и f_{nk} определяются формулами (III-50a, 49c и 42e, f), коэффициенты Φ_{nk} и X_{nk} — выражениями (П₄-9, 12) и (П₂-11), а величины $G_{nk}(R_2)$ и $H_{nk}(R_2)$ — равенствами (П₉-4 и 5).

Таким образом, задача первого этапа исследования поля в статоре и воздушном зазоре синхронной машины с когтеобразными полюсами оказывается полностью решенной: равенства (III-54—56) являются ее конечным результатом.

ГЛАВА IV МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВОЗДУШНОМ ЗАЗОРЕ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

В машинах с когтеобразными полюсами воздушный промежуток между внутренней поверхностью расточки статора и стальными поверхностями полюсной системы ротора имеет весьма сложную форму. В отличие от обычных явно выраженных полюсов, имеющих постоянное сечение в любом месте вдоль длины машины, сечение когтеобразных полюсов ввиду наличия внутреннего скоса (рис. 62а, 63 и др.) оказывается переменным как по величине, так и по форме. Кроме того, ширина полюса вдоль дуги окружности ротора в силу ряда технологических и конструктивных соображений часто выполняется также переменной и обычно уменьшается по направлению к тонкому концу полюса. В результате полюс приобретает, помимо внутреннего, еще и боковые скосы (рис. 79), а форма воздушного промежутка между статором и ротором

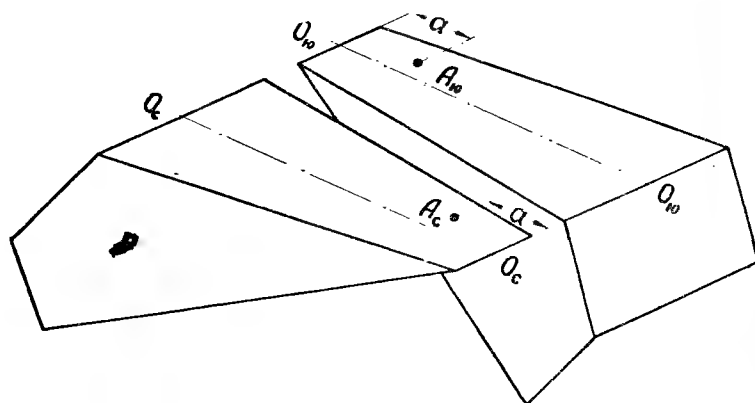


Рис. 79. Особый вид симметрии в когтеобразном индукторе.

усложняется настолько, что ее даже приблизительно не удастся свести к какому-либо простому геометрическому образу.

В связи с этим усложняется также исследование магнитного поля в воздушном промежутке машины с когтеобразными полюсами. Применение точных аналитических методов расчета поля здесь оказывается практически невозможным, и остается, таким образом, два пути: либо решать задачу одним из численных методов, либо применить какой-либо упрощенный способ.

Использование первого пути неудобно тем, что нельзя получить сколько-нибудь общего решения задачи и, кроме того, ввиду объемного характера поля вычисления должны оказаться весьма громоздкими. Второй путь более удобен в рассматриваемом случае, тем более что, например, при исследовании поля на поверхности расточки статора можно воспользоваться относительно простым и достаточно точным методом, основанным на понятии удельной магнитной проводимости воздушного зазора между статором и ротором.

1. МЕТОД УДЕЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ВОЗДУШНОГО ЗАЗОРА

Пользуясь этим методом, обычно исходят из того, что форма и положение силовых линий в воздушном зазоре, или, иначе говоря, картина поля в воздушном промежутке машины, практически мало зависят от подробностей распределения магнитного потенциала на поверхностях статора и ротора, а почти полностью определяются такими основными факторами, как форма очертания полюсных наконечников, продольный или поперечный характер поля и т. п. При таком предположении оказывается возможным, определив картину поля при некоторых простейших, но имеющих основной характер условиях, считать затем эту картину неизменной и при других, более сложных, но не сильно отличающихся от первоначальных, условиях. В качестве характеристики этой условно стабильной картины поля оказывается удобным ввести понятие об удельной магнитной проводимости воздушного зазора вдоль той или иной силовой линии, соединяющей рассматриваемую точку M на поверхности статора с некоторой точкой L на поверхности полюса (рис. 80). Величина этой магнитной проводимости обычно определяется как отношение нормальной (радиальной) составляющей индукции B_{Mr} на поверхности статора в рассматриваемой точке M к величине магнитодвижущей силы F_{LM} , вычисленной вдоль пути LM :

$$\lambda_M = \frac{B_{Mr}}{F_{LM}}. \quad (IV-1)$$

М. д. с. между точками L и M равна, как известно, разности магнитных потенциалов этих точек:

$$F_{LM} = \int_{LM} \vec{H} d\vec{l} = \int_{LM} -\frac{\partial u}{\partial l} dl = -u_M + u_L, \quad (IV-2)$$

и если, например, исследуемое поле отнесено к системе цилиндрических координат (r, ϑ, z) , так что потенциал на поверхности статора выражается в виде функции $u(\vartheta, z)$, а потенциалы на поверхности северного и южного полюсов — в виде функций $u_c(\vartheta, z)$ и $u_{ю}(\vartheta, z)$, причем величины ϑ и z являются коор-

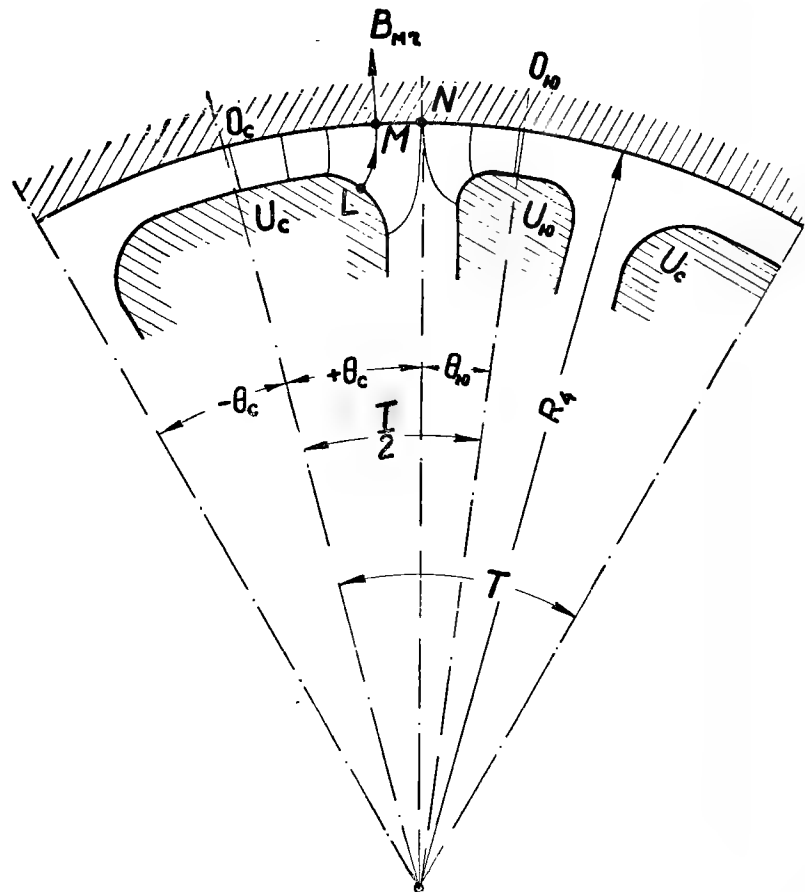


Рис. 80. К определению удельной магнитной проводимости воздушного промежутка между статором и ротором:

θ_c и $\theta_{ю}$ — углы, занимаемые полями северного и южного полюсов.

динатами точки M (рис. 80), то м. д. с. F_{LM} будет также функцией этих координат и согласно соотношению (IV-2) будет равна

а) в случае, если силовая линия LM соединяет точку M с северным полюсом:

$$F_{LM}(\vartheta, z) = u_c(\vartheta, z) - u(\vartheta, z), \quad (IV-2a)$$

б) в случае, если линия LM , выйдя из точки M , попадает в южный полюс (например, $M'L'$ на рис. 80):

$$F_{LM}(\vartheta, z) = u_{ю}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z). \quad (IV-2b)$$

С другой стороны, м.д.с. F_{LM} может быть вычислена по известному дифференциальному выражению, включающему сечение ds и поток $d\Phi$ элементарной силовой трубки, осью которой является линия LM :

$$F_{LM} = \int_{LM} H_l dl = \int_{LM} \frac{B_l}{\mu_0} dl = \int_{LM} \frac{1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{ds} dl = \frac{d\Phi}{\mu_0} \int_{LM} \frac{dl}{ds}. \quad (IV-3)$$

В этой формуле поток $d\Phi$ можно представить как произведение индукции B_{Mr} на элементарную площадку поверхности расточки статора ds_0 :

$$d\Phi = B_{Mr} \cdot ds_0. \quad (IV-3a)$$

При этом равенство (IV-3) примет вид:

$$F_{LM} = B_{Mr} \frac{1}{\mu_0} \int_{LM} \frac{ds_0}{ds} dl. \quad (IV-3b)$$

Подставляя это выражение в формулу (IV-1), будем иметь следующее выражение для удельной магнитной проводимости воздушного зазора в точке M :

$$\lambda_M = \frac{\mu_0}{\int_{LM} \frac{ds_0}{ds} dl}. \quad (IV-4)$$

Из этой формулы видно, что поскольку интеграл в знаменателе правой части равенства (IV-4) зависит только от формы рассматриваемой силовой трубки LM и от ее длины, то и удельная магнитная проводимость λ_M зависит только от формы (картины) поля и от величины воздушного зазора, но не зависит от распределения магнитных потенциалов на поверхности полюсов и расточки статора.

Пользуясь формулой (IV-4), можно при известной картине поля определить удельную магнитную проводимость воздушного промежутка в любой точке M на поверхности статора.

Однако практически обычно оказывается более простым определение λ_M с помощью формулы (IV-1) при известных (например, из опыта) величинах B_{Mr} и F_{LM} . Поскольку при этом величина F_{LM} как функция координат ϑ и z согласно равенствам (IV-2a, b) имеет различный вид в зависимости от того, находится ли точка M против северного или против южного полюса (рис. 80), то и выражение для λ_M как функции ϑ и z должно быть в этих двух случаях различным. Поэтому в аналитических выражениях типа (IV-1) следует различать удельную магнитную проводимость северного полюса $\lambda_c(\vartheta, z)$ и южного полюса $\lambda_{(ю)}(\vartheta, z)$. Переход от одной из них к другой происходит в той точке поверхности статора N (рис. 80), где силовая линия не идет ни к северному, ни к южному полюсу, а направляется по нейтралю к центру машины. Эту точку можно характеризовать углами Θ_c и $\Theta_{ю}$ между осью северного или южного полюса и упомянутой нейтралью.

На основании изложенного можно с помощью рис. 80 и формул (IV-1 и 2a, b) написать следующие основные уравнения, характеризующие метод удельной магнитной проводимости воздушного зазора:

$$\left. \begin{aligned} -\Theta_c < \vartheta < +\Theta_c \dots b_r(\vartheta, z) &= [u_c(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(c)}(\vartheta, z) \\ +\Theta_c < \vartheta < T - \Theta_c \dots b_r(\vartheta, z) &= [u_{ю}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(ю)}(\vartheta, z) \\ \frac{T}{2} - \Theta_{ю} < \vartheta < \frac{T}{2} + \Theta_{ю} \dots b_r(\vartheta, z) &= [u_{ю}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(ю)}(\vartheta, z) \end{aligned} \right\} \quad (IV-5)$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ (IV-5) В ВИДЕ РЯДА ФУРЬЕ ПО ϑ

Для входящих в уравнения (IV-5) величин $b_r(\vartheta, z)$ и $u(\vartheta, z)$ в главе III были получены выражения в виде тригонометрических рядов Фурье (см. формулы III-54 и П₂-11). Поскольку в дальнейшем, на третьем этапе решения задачи, предстоит сравнивать между собою выражения для индукции и потенциала, полученные в III и в настоящей главах, то, очевидно, необходимо привести эти выражения в обоих случаях к одинаковому виду. Поэтому при подстановке в формулы (IV-5) выражений для величин $b_r(\vartheta, z)$ и $u(\vartheta, z)$ следует воспользоваться указанными выше формулами главы III. При этом выражение для индукции $b_r(\vartheta, z)$ может быть использовано без всяких изменений:

$$b_r(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \varphi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n(z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \chi_n(z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right]. \quad (IV-6)$$

Что же касается ряда для потенциала $u(r, \vartheta, z)$, то во избежание смещения индексов суммирования в равенствах (IV-6) и (III-54) целесообразно в последнем из них изменить обозначение индекса n на m . С учетом изложенного выражение для потенциала на поверхности статора $u(\vartheta, z)$ может быть написано в виде:

$$u(\vartheta, z) = \frac{1}{2} u_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[u_m(z) \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T} + v_m(z) \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T} \right]. \quad (IV-7)$$

По аналогии с этим для потенциалов поверхностей полюсов $u_c(\vartheta, z)$ и $u_{ю}(\vartheta, z)$ можно написать подобные же равенства:

$$\left. \begin{aligned} u_c(\vartheta, z) &= \frac{1}{2} u_c^{(c)}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[u_m^{(c)}(z) \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T} + v_m^{(c)}(z) \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T} \right] \\ u_{ю}(\vartheta, z) &= \frac{1}{2} u_{ю}^{(ю)}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[u_m^{(ю)}(z) \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T} + v_m^{(ю)}(z) \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T} \right] \end{aligned} \right\} \quad (IV-8)$$

Переходя теперь к вычислению коэффициентов $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ ряда (IV-6), заметим, что в соответствии с теорией рядов Фурье для этих коэффициентов можно написать следующие выражения (см. также формулы П₂-11):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= \frac{2}{T} \int_{-\Theta_c}^{T-\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \chi_n(z) &= \frac{2}{T} \int_{-\Theta_c}^{T-\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (IV-9)$$

где T — период функции $b_r(\vartheta)$, а $(-\Theta_c)$ — произвольный начальный угол, принятый в данном случае равным координате $(-\Theta_c)$ точки N' , ограничивающей поле северного полюса с левой стороны (рис. 80).

Разбивая интервал интегрирования в формулах (IV-9) на две части — согласно выражениям (IV-5) — и используя эти выражения, а также соотношения (IV-7 и 8) для подстановки в полученные интегралы, после интегрирования и преобразования (см. приложения 10 и 11) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= f_n^{(c)}(z) - \frac{1}{2} \lambda_{no}(z) u_0(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm}(z) \cdot u_m(z) \\ \chi_n(z) &= f_n^{(s)}(z) - \sum_{m=1}^{\infty} l_{nm}(z) \cdot v_m(z) \end{aligned} \right\} \quad (IV-10)$$

В этих выражениях через $f_n^{(c)}(z)$ и $f_n^{(s)}(z)$ обозначены функции, не зависящие от распределения потенциала $u(\vartheta, z)$ на поверхности статора и определяемые лишь потенциалами полюсов $u_c(\vartheta, z)$ и $u_{so}(\vartheta, z)$ и удельной магнитной проводимостью зазора $\lambda^{(c)}(\vartheta, z)$ и $\lambda^{(so)}(\vartheta, z)$. Полные выражения для величин $f_n^{(c)}(z)$ и $f_n^{(s)}(z)$ даны в приложении 11 в виде формул (П11-17а и б). Входящие в эти формулы коэффициенты $\lambda_{nm}^{(c)}(z)$, $\lambda_{nm}^{(so)}(z)$, $l_{nm}^{(c)}(z)$ и $l_{nm}^{(so)}(z)$ определяются согласно равенствам (П11-12а и б) в виде суммы или разности $(m-n)$ -й и $(m+n)$ -й гармоник разложения удельной магнитной проводимости $\lambda^{(c)}(\vartheta, z)$ или $\lambda^{(so)}(\vartheta, z)$ в ряд Фурье по косинусам относительно переменной ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nm}^{(c)}(z) &= \lambda_{(m-n)}^{(c)}(z) + \lambda_{(m+n)}^{(c)}(z) \\ l_{nm}^{(c)}(z) &= \lambda_{(m-n)}^{(c)}(z) - \lambda_{(m+n)}^{(c)}(z) \\ \lambda_{nm}^{(so)}(z) &= \lambda_{(m-n)}^{(so)}(z) + \lambda_{(m+n)}^{(so)}(z) \\ l_{nm}^{(so)}(z) &= \lambda_{(m-n)}^{(so)}(z) - \lambda_{(m+n)}^{(so)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (IV-11)$$

При этом согласно соотношениям (П11-13) и (П10-4а, б) для произвольной p -й гармоники удельной магнитной проводимости имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p^{(c)}(z) &= \frac{2}{T} \int_0^{\theta_c} \lambda^{(c)}(\vartheta, z) \cos \frac{2p\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \lambda_p^{(so)}(z) &= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T-\theta_c} \lambda^{(so)}(\vartheta, z) \cos \frac{2p\pi\vartheta}{T} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (IV-12)$$

Помимо величин $f_n^{(c)}(z)$ и $f_n^{(s)}(z)$, в формулы (IV-10) входят еще ряды, составленные из гармоник $u_m(z)$ и $v_m(z)$ потенциала на поверхности статора $u(\vartheta, z)$ и являющиеся, таким образом, функциями этого потенциала. Коэффициенты $\lambda_{nm}(z)$ и $l_{nm}(z)$ рядов (IV-10) согласно равенствам (П11-15а и б) представляют собой суммы соответствующих величин, относящихся к полюсам северной и южной полярности. Используя для этих величин равенства (IV-11), можно получить еще следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nm}(z) &= \lambda_{(m-n)}(z) + \lambda_{(m+n)}(z) \\ l_{nm}(z) &= \lambda_{(m-n)}(z) - \lambda_{(m+n)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (IV-13)$$

$$\lambda_p(z) = \lambda_p^{(c)}(z) + \lambda_p^{(so)}(z), \quad (IV-14)$$

$$\text{причем} \quad p = m - n \text{ или } p = m + n. \quad (IV-14a)$$

в. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ВЕЛИЧИН $\varphi_n(z)$ И $\chi_n(z)$

Для входящих в уравнения (IV-10) величин $\varphi_n(z)$, $\chi_n(z)$, $u_m(z)$ и $v_m(z)$ можно согласно формулам (П4-9), (П11-21, 24) и при тех же замечаниях, которые были сделаны при выводе формул (IV-6 и 7), написать:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= \frac{1}{2} \Phi_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \\ \chi_n(z) &= \frac{1}{2} X_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\} \quad (IV-15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_m(z) &= \frac{1}{2} u_{m0} + \sum_{q=1}^{\infty} u_{mq} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \\ v_m(z) &= \frac{1}{2} v_{m0} + \sum_{q=1}^{\infty} v_{mq} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\} \quad (IV-16)$$

Кроме того, входящие в равенства (П11-17а и б) величины $u_m^{(c)}(z)$, $u_m^{(so)}(z)$, $v_m^{(c)}(z)$ и $v_m^{(so)}(z)$ можно по аналогии с равенствами (IV-16) представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_m^{(c)}(z) &= \frac{1}{2} u_{m0}^{(c)} + \sum_{q=1}^{\infty} u_{mq}^{(c)} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \\ u_m^{(so)}(z) &= \frac{1}{2} u_{m0}^{(so)} + \sum_{q=1}^{\infty} u_{mq}^{(so)} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \\ v_m^{(c)}(z) &= \frac{1}{2} v_{m0}^{(c)} + \sum_{q=1}^{\infty} v_{mq}^{(c)} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \\ v_m^{(so)}(z) &= \frac{1}{2} v_{m0}^{(so)} + \sum_{q=1}^{\infty} v_{mq}^{(so)} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\} \quad (IV-17)$$

Переходя теперь к вычислению коэффициентов Φ_{nk} и X_{nk} рядов (IV-15), заметим, что согласно теории рядов Фурье для них можно написать следующие выражения (см. также формулы П4-9 и 12):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \varphi_n(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \\ X_{nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \chi_n(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \end{aligned} \right\} \quad (IV-18)$$

Подставляя в эти равенства выражения (IV-10) для функций $\Phi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ и используя затем еще формулы (IV-16), (П₁₁-17а, б) и (IV-17), после интегрирования и преобразований (см. приложение 12, равенства П₁₂-9 и П₁₂-10) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{nk} &= F_{nk}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \Lambda_{nk00} u_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_{nkm0} u_{m0} + \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_{nk0q} u_{0q} \right) - \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_{nkmq} u_{mq} \\ X_{nk} &= F_{nk}^{(s)} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} L_{nkm0} v_{m0} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} L_{nkmq} v_{mq} \end{aligned} \right\}, \text{(IV-19)}$$

причем коэффициенты Λ_{nkmq} и L_{nkmq} являются определенными сочетаниями гармоник удельной магнитной проводимости воздушного зазора и вычисляются по формулам (П₁₂-15—17), а величины $F_{nk}^{(c)}$ и $F_{nk}^{(s)}$ согласно равенствам (П₁₂-7, 8) не зависят от потенциала на поверхности расточки статора и определяются лишь гармониками потенциала полюсов и удельной магнитной проводимости зазора.

Следует заметить, что поскольку обычно северные и южные полюса оказываются по форме совершенно одинаковыми, то в роторе с когтеобразными полюсами имеет место своеобразная симметрия, характеризующаяся расположением соответственных точек A_c и A_y (см. рис. 79) в разных концах машины. Это явление находит отражение в величинах коэффициентов Λ_{nkmq} и L_{nkmq} .

Как показано в приложении 13, эти коэффициенты оказываются равными нулю в том случае, когда сумма их индексов

$$n + k + m + q \quad \text{(IV-20)}$$

является нечетным числом. Если же сумма (IV-20) является числом четным, то коэффициенты Λ_{nkmq} и L_{nkmq} могут быть вычислены по упрощенным формулам (П₁₃-13а).

Выражения (IV-19) определяют необходимые коэффициенты Φ_{nk} и X_{nk} в разложениях (IV-15) и (IV-6) индукции на поверхности расточки статора как функции от распределения потенциала на этой поверхности и на поверхностях полюсов и от свойств воздушного промежутка между ними. Тем самым выражение (IV-19) вместе с (IV-6 и 15) дает полное решение поставленной выше задачи на втором этапе исследований (см. гл. III, § 1).

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

u_{nk} и v_{nk}

На изложенном в главе III первом этапе исследований поля в статоре синхронной машины с когтеобразными полюсами были получены выражения (III-56а и б), связывающие производные (n -е, k -е) гармоники Φ_{nk} и X_{nk} индукции в воздушном зазоре (на поверхности расточки статора) с гармониками (n -го, k -го порядка) скалярного магнитного потенциала u_{nk} , v_{nk} на этой же поверхности расточки. Эта связь была получена путем решения основных уравнений магнитного поля для статорных участков (станины, спинки статора, зубцового слоя) и отражает поэтому свойства и форму этих участков (коэффициенты E_{nk} , f_{nk} и т. п.).

В первых параграфах данной главы на втором этапе исследования было получено выражение (IV-19), дающее еще одну связь между гармониками индукции Φ_{nk} , X_{nk} и потенциала u_{mq} и v_{mq} на поверхности расточки статора. Эта зависимость была найдена путем исследования поля в воздушном зазоре и отражает поэтому его свойства и форму (коэффициенты Λ_{nkmq} и L_{nkmq}).

Теперь, на третьем этапе исследования, необходимо сравнить оба полученных выражения для гармоник индукции и потенциала и обратить внимание на то, что в обоих выражениях гармоники с одинаковыми индексами должны иметь, очевидно, одно и то же значение. Поэтому, подставляя выражение для Φ_{nk} , данное формулой (IV-19), в формулу (III-56а), а выражение для X_{nk} (IV-19) — в формулу (III-56б) и перетренировав члены, будем иметь следующие уравнения:

$$u_{nk} = U_{nk}^{(c)} - \sum_{m,q} \Lambda_{nkmq} u_{mq}, \quad \text{(IV-20a)}$$

$$v_{nk} = V_{nk}^{(s)} - \sum_{m,q} L_{nkmq} v_{mq}, \quad \text{(IV-20b)}$$

где для краткости обозначено:

$$\left. \begin{aligned} U_{nk}^{(c)} &= E_{nk} F_{nk}^{(c)} + f_{nk} G_{nk}(R_2) + I_{nk} \\ V_{nk}^{(s)} &= E_{nk} F_{nk}^{(s)} + f_{nk} H_{nk}(R_2) + J_{nk} \end{aligned} \right\}, \quad \text{(IV-21a)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nkmq} &= E_{nk} \Lambda_{nkmq} \\ L_{nkmq} &= E_{nk} L_{nkmq} \end{aligned} \right\}, \quad \text{(IV-21b)}$$

$$\sum_{m, q} \lambda_{nkmq} u_{mq} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \lambda_{nk00} u_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nkm0} u_{m0} + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{nk0q} u_{0q} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \lambda_{nkmq} u_{mq}, \quad (\text{IV-22a})$$

$$\sum_{m, q} l_{nkmq} v_{mq} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} l_{nkm0} v_{m0} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} l_{nkmq} v_{mq}. \quad (\text{IV-22b})$$

Как видно из выражений (IV-20a, b), любая (n -я, k -я) гармоника потенциала на поверхности расточки статора u_{nk} или v_{nk} может быть представлена состоящей из двух слагаемых. Первые из этих слагаемых — $U_{nk}^{(0)}$ или $V_{nk}^{(0)}$ — согласно формулам (IV-21a) не зависят от других гармоник потенциала и целиком определяются свойствами статорных участков (коэффициенты E_{nk} , f_{nk}), распределением потенциала по поверхности полюсов (величины $F_{nk}^{(c)}$ и $F_{nk}^{(s)}$), распределением индукции по торцам станины (величины $G_{nk}(R_2)$ и $H_{nk}(R_2)$) и величиной гармоник токов I_{nk} и J_{nk} , протекающих в обмотке статора.

Вторые слагаемые в формулах (IV-20a, b) представляют собой, как видно из выражений (IV-22a, b), бесконечные двойные ряды, общий член которых является произведением гармоники удельной магнитной проводимости воздушного промежутка (λ_{nkmq} или l_{nkmq}) на гармонику потенциала на поверхности расточки статора (u_{mq} или v_{mq}).

Поскольку гармоники u_{mq} и v_{mq} являются теми же искомыми гармониками, что и u_{nk} , v_{nk} и отличаются от них лишь обозначением индексов (m вместо n , q вместо k), то из выражений (IV-20a, b) нетрудно заключить, что каждая гармоника потенциала n -го, k -го порядка оказывается зависящей от некоторой суммы всех других гармоник этого же потенциала и поэтому не может быть непосредственно определена с помощью равенств (IV-20a, b). Для определения искоемых гармоник необходимо написать равенства (IV-20a, b) бесконечное число раз, меняя каждый раз индексы n и k . Тогда получатся две системы уравнений (одна — для u , другая — для v), каждая из которых состоит из бесконечного числа уравнений первой степени с бесконечным количеством неизвестных, т. е. так называемые бесконечные системы уравнений [61].

Решение бесконечных систем уравнений, как известно [61], может быть при определенных условиях сравнительно просто найдено методом последовательных приближений. Как показывают примеры (см. § 5 настоящей главы), уравнения

(IV-20a, b) оказываются характерными тем, что в суммах (IV-22a, b) наибольшую величину всегда имеет член с $m = n$ и $q = k$, а все прочие члены получаются значительно меньшими. Это обстоятельство позволяет в первом приближении пренебречь всеми остальными членами, кроме $m = n$, $q = k$, и тогда вместо (IV-20a, b) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^{(1)} &= \frac{U_{nk}^{(0)}}{1 + \lambda_{nknk}} \\ v_{nk}^{(1)} &= \frac{V_{nk}^{(0)}}{1 + l_{nknk}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-23})$$

Определив по этим формулам в первом приближении все гармоники, их можно подставить в ряды вида (IV-22a, b) и, найдя суммы этих рядов, использовать их для подстановки в уравнения (IV-20a, b) с целью определения $u_{nk}^{(1)}$ и $v_{nk}^{(1)}$ во втором приближении. Эти значения $u_{nk}^{(1)}$ и $v_{nk}^{(1)}$ затем можно вновь подставить в ряды (IV-22a, b) и с помощью равенств (IV-20a, b) найти третье приближение, и т. д. до получения желаемой точности результата. По окончании этого процесса все необходимые гармоники потенциала будут найдены и поставленная в начале III главы задача исследования поля в статоре машины с когтеобразными полюсами окажется таким образом полностью решенной.

Подстановкой найденных величин u_{nk} и v_{nk} обратно в равенства (III-56a, b) можно определить также все гармоники индукции на поверхности расточки статора, а с помощью равенств (III-49b) — также на граничных поверхностях между зубцовым слоем и спинкой статора ($\Phi_{nk}^{(3)}$) и между спинкой и станиной ($\Phi_{nk}^{(2)}$). Применяя затем наиболее общие формулы (III-10a, 43, 45a, b, c), можно в случае необходимости определить величину потенциала или индукции в любой точке статора.

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЛЯ В СТАТОРЕ ПРИ КОГТЕОБРАЗНЫХ ПОЛЮСАХ С БОЛЬШИМ БОКОВЫМ СКОСOM

В качестве иллюстрации проведенного в III и IV главах аналитического исследования магнитного поля в статоре и воздушном зазоре синхронной машины с когтеобразными полюсами целесообразно привести результаты расчетов, выполненных применительно к машине, имеющей следующие основные размеры (рис. 75):

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 17 \text{ см}; R_3 = 12,8 \text{ см}; l = 8 \text{ см}; \\ R_2 &= 15,5 \text{ см}; R_4 = 9,5 \text{ см}; 2p = 4 \dots m = 4 \dots T = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-24a})$$

Полагая, что индукция в стали статора составляет около 13 500 гс, можно принять, что магнитная проницаемость в радиальном направлении равна ~ 1000 гс·см/а:

$$\mu_r = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1000 \text{ гс·см/а}. \quad (\text{IV-24b})$$

Тогда для проницаемостей в осевом и тангенциальном направлениях будем иметь:

$$\mu_{2z} = \mu_{3z} = 25 \text{ гс·см/а}; \mu_{3\theta} = 2 \text{ гс·см/а}. \quad (\text{IV-24c})$$

Вычисленные согласно данным (IV-24a, b, c) с помощью формул (III-49c) коэффициенты $e_{nk}^{(2)}$ и $e_{nk}^{(3)}$ приведены в таблицах 2 и 3.

Значения коэффициентов $e_{nk}^{(2)}$

Таблица 2

n	k			
	0	1	2	3
0	—	0,84497	—	0,52055
1	0,23588	—	0,31638	—
2	—	0,09614	—	0,08938
3	0,03147	—	0,03008	—
4	—	0,00993	—	0,00859
5	0,00319	—	0,00295	—
6	—	0,00098	—	0,00084
7	0,00031	—	0,00029	—
8	—	0,00010	—	0,00008

Значения коэффициентов $e_{nk}^{(3)}$

Таблица 3

n	k			
	0	1	2	3
0	—	0,89929	—	0,63355
1	0,99515	—	0,83126	—
2	—	0,95267	—	0,74077
3	0,97495	—	0,86723	—
4	—	0,93342	—	0,76189
5	0,94094	—	0,85117	—
6	—	0,89744	—	0,74792
7	0,89591	—	0,81774	—
8	—	0,85080	—	0,71876

Следует заметить, что в таблицах 2 и 3 отсутствуют коэффициенты, индексы которых удовлетворяют условию

$$n + k = \text{четное число}. \quad (\text{IV-24d})$$

Это происходит потому, что в силу особого рода симметрии контурных полюсов (рис. 79) гармоники потенциала и индукции с номерами, удовлетворяющими условию (IV-24d), оказываются равными нулю, и необходимость в вычислении соответствующих коэффициентов $e_{nk}^{(2)}$ и $e_{nk}^{(3)}$ отпадает.

Как видно из таблицы 3, величины коэффициентов $e_{nk}^{(3)}$ даже при достаточно больших значениях n и k сравнительно мало отличаются от единицы. Согласно формулам (III-49b) этот факт означает, очевидно, что на границе зубцового слоя со спинкой статора ($r = R_3$) спектральный состав гармоник индукции оказывается практически таким же, как и на поверхности статора ($r = R_4$).

Причина этого явления состоит в том, что зубцовый слой проводит магнитный поток в основном только в радиальном направлении, и поэтому распределение индукции в осевом и тангенциальном направлениях (т. е. по осям θ и z) практически не изменяется.

В противоположность этому в спинке статора, обладающей хорошей магнитной проводимостью, кроме радиального, еще в тангенциальном направлении происходит быстрое затухание высших пространственных гармоник индукции, что находит отражение в очень сильном уменьшении коэффициентов $e_{nk}^{(2)}$ по мере увеличения номера гармоники n (табл. 2). Однако в связи с недостаточной проводимостью пакета статора в осевом направлении гармоники с увеличением номера k убывают медленно. Поэтому на границе спинки со станиной распределение индукции по окружности машины должно иметь практически синусоидальный характер, однако при наличии неравномерности индукции по длине машины эта неравномерность будет иметь место также и на границе спинки статора со станиной.

В таблице 4 приведены значения коэффициентов $E_{nk}^{(3)}$, вычисленные согласно равенству (IV-50a) и необходимые при составлении системы уравнений вида (IV-20a).

Для вычисления гармоник удельной магнитной проводимости воздушного зазора $\Lambda_{ps}^{(c)}$ и $\Lambda_{ps}^{(te)}$ согласно формулам (II-12-15) и (II-11-13) необходимо знать функции $\lambda^{(c)}(\theta, z)$ и $\lambda^{(te)}(\theta, z)$, выражающие зависимость удельной магнитной проводимости зазора от координат (θ, z) рассматриваемой точки поверхности расточки статора.

Значения коэффициентов $E_{nk}^{(3)}$

n	k			
	0	1	2	3
0	—	0,0094914	—	0,0046067
1	0,0057935	—	0,0047770	—
2	—	0,0043346	—	0,0036368
3	0,0039993	—	0,0037130	—
4	—	0,0037172	—	0,0032549
5	0,0036237	—	0,0033921	—
6	—	0,0034405	—	0,0030510
7	0,0033839	—	0,0031907	—
8	—	0,0032352	—	0,0029100

Ограничиваясь здесь рассмотрением только продольного поля, можно определить удельную магнитную проводимость зазора по той картине поля, которая имеет место при холостом ходе машины. При этом с достаточной для практических целей точностью можно считать, что картина поля в любом поперечном сечении машины имеет тот же вид, что и в обычных явнополюсных машинах, с той лишь разницей, что расчетная полюсная дуга α_c или $\alpha_{ю}$ оказывается зависящей от

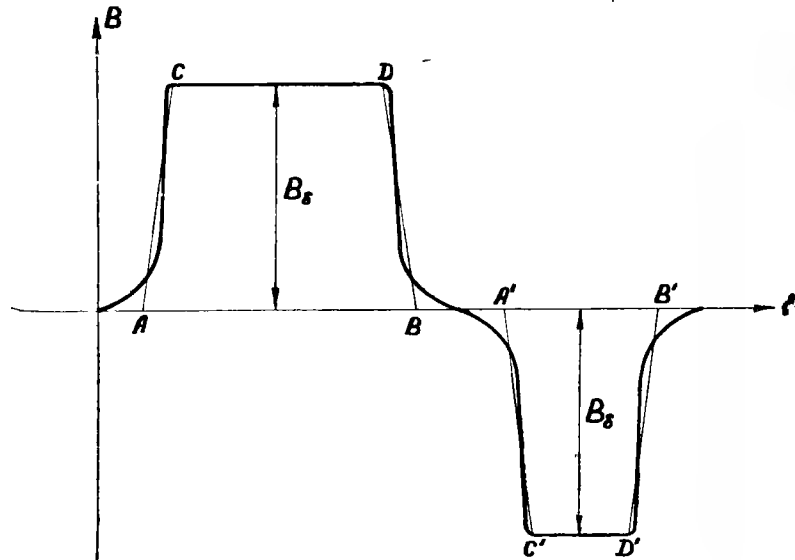


Рис. 81. Реальная и упрощенная форма кривой поля полюса (в поперечном сечении машины).

положения сечения, т. е. от координаты z , ибо в связи с наличием боковых скосов полюса (рис. 79) его ширина изменяется вдоль его длины. По той же причине расчетные полюсные дуги α_c и $\alpha_{ю}$ в одном и том же сечении оказываются, вообще говоря, неодинаковыми (рис. 80, 81).

Для получения достаточно простых выражений для функций $\lambda^{(c)}(\vartheta, z)$ и $\lambda^{(ю)}(\vartheta, z)$ целесообразно аппроксимировать кривую поля тремя отрезками прямых (рис. 80): горизонталь-

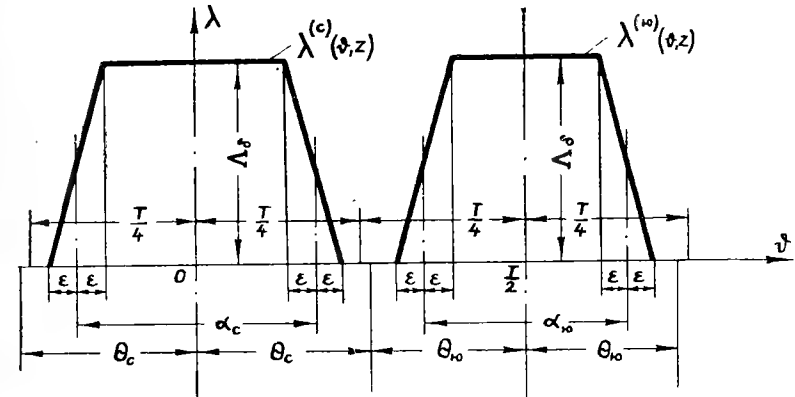


Рис. 82. Упрощенные кривые удельной магнитной проводимости воздушного зазора.

ным CD (или $C'D'$) и двумя наклонными AC и BD (или $A'C'$ и $B'D'$). Тогда, подставляя полученную кусочно-линейную зависимость $B(\vartheta)$ в формулу (IV-1) и имея в виду, что м.д.с. F_{LM} между полюсом и статором при холостом ходе постоянна и равна F_s для северного полюса и $-F_s$ для южного, нетрудно получить искомые функции $\lambda^{(c)}(\vartheta, z)$ и $\lambda^{(ю)}(\vartheta, z)$ в виде трапециевидных кривых, изображенных на рис. 82. Согласно рис. 82 для удельной магнитной проводимости зазора под северным полюсом $\lambda^{(c)}(\vartheta, z)$ можно написать:

$$\lambda^{(c)}(\vartheta, z) = \begin{cases} \Lambda_s \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha_c + \epsilon\right) + \vartheta}{2\epsilon} & \dots \dots \dots \left(\frac{\alpha_c}{2} + \epsilon\right) < \vartheta < -\left(\frac{\alpha_c}{2} - \epsilon\right) \\ \Lambda_s \cdot \dots \dots \dots \dots \dots \dots \left(\frac{\alpha_c}{2} - \epsilon\right) < \vartheta < +\left(\frac{\alpha_c}{2} - \epsilon\right) \\ \Lambda_s \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha_c + \epsilon\right) - \vartheta}{2\epsilon} & \dots \dots \dots \left(\frac{\alpha_c}{2} - \epsilon\right) < \vartheta < \left(\frac{\alpha_c}{2} + \epsilon\right) \end{cases} \quad (IV-25)$$

причем $\Lambda_{\delta} = \frac{\mu_0}{\delta}$ — удельная магнитная проводимость воздушного зазора под серединой полюса.

Полагая, что боковые скосы полюса выполнены по прямой линии (рис. 83), можно считать, что расчетная полюсная дуга α_c изменяется в функции от z также по закону прямой:

$$\alpha_c = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_0) \frac{z - z_1}{l}, \quad (IV-26)$$

где α_m и α_0 — максимальная и минимальная расчетные полюсные дуги, соответствующие широкому и узкому концам полюса (рис. 79).

Другие величины, входящие в выражения (IV-25), можно считать независимыми от координаты z .

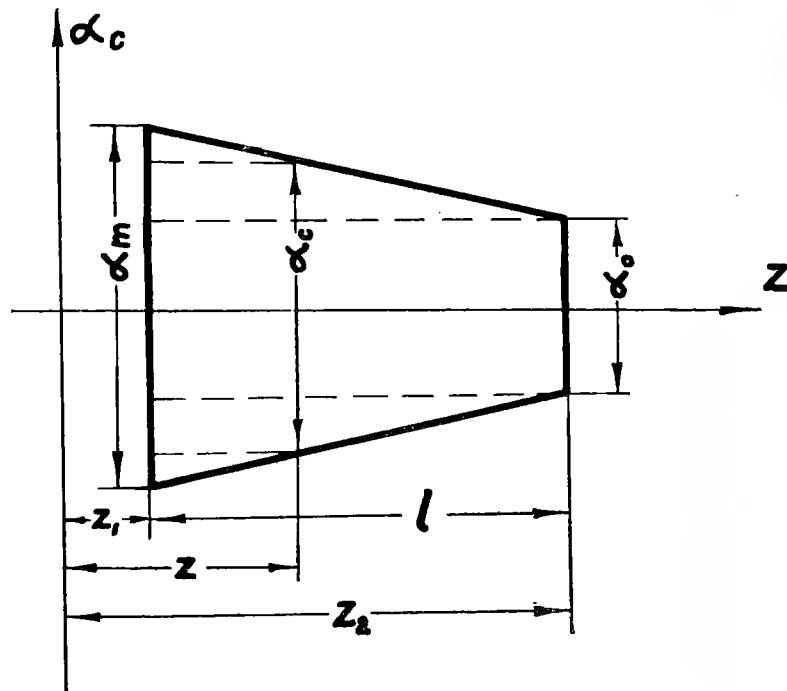


Рис. 83. Линейная зависимость полюсной дуги от координаты: α_0 и α_m — минимальная и максимальная полюсные дуги; α_c — произвольная (текущая) полюсная дуга.

Используя соотношения (IV-25 и 26) для подстановки в формулы (П₁₁-13) и (П₁₂-15), после интегрирования и преобразований можно получить следующие выражения для гармоник удельной магнитной проводимости зазора $\Lambda_{ps}^{(c)}$:

$$\Lambda_{ps}^{(c)} = \left\{ \begin{aligned} &\Lambda_{\delta} \cdot \frac{2h}{\pi^2} \cdot \frac{\sin p\pi e}{p\pi e} \cdot \frac{\cos s\pi \cdot \cos \frac{p\pi a_0}{2} - \cos \frac{p\pi a_m}{2}}{(ph^2) - 4s^2} \dots \left(\begin{matrix} p \neq 0 \\ s \neq 0 \end{matrix} \right) \\ &\Lambda_{\delta} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \cos s\pi}{(s\pi)^2} \dots \left(\begin{matrix} p = 0 \\ s \neq 0 \end{matrix} \right) \\ &\Lambda_{\delta} \cdot \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{h}{2} \right) \dots \left(\begin{matrix} p = 0 \\ s = 0 \end{matrix} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (IV-27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2\alpha_0}{T}, \quad a_m = \frac{2\alpha_m}{T} \\ h &= a_m - a_0 \\ e &= \frac{2e}{T} \end{aligned} \right\}. \quad (IV-27a)$$

Для рассматриваемой машины имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 0,1 \text{ см}, \quad a_m = 1,0, \quad a_0 = 0,273 \\ e &= 0,025, \quad h = 0,727 \end{aligned} \right\}. \quad (IV-28)$$

Поэтому

$$\Lambda_{\delta} = \frac{\mu_0}{\delta} = \frac{0,4\pi}{0,1} = 4\pi = 12,56 \text{ гс/а}, \quad (IV-28a)$$

Таблица 5

Амплитуды гармоник удельной магнитной проводимости воздушного зазора $\Lambda_{ps}^{(c)}$

p	s						
	0	1	2	3	4	5	6
0	+3,95294	—	0	—	0	—	0
1	—	+0,47852	—	+0,04684	—	+0,01670	—
2	+1,42557	—	-0,21688	—	-0,04867	—	-0,02123
3	—	-0,67184	—	+0,01620	—	+0,00532	—
4	-0,24385	—	+0,27298	—	+0,03710	—	+0,01520
5	—	+0,10534	—	-0,04253	—	-0,01117	—
6	+0,01447	—	+0,09126	—	-0,00612	—	-0,00220
7	—	+0,07869	—	-0,17016	—	-0,02323	—
8	-0,09908	—	-0,18813	—	+0,11092	—	+0,03040
9	—	+0,03254	—	+0,18605	—	-0,02205	—
10	+0,01845	—	+0,02647	—	-0,08716	—	-0,01069

Таблица 6

Коэффициенты Λ_{nkmq}

n	m	k															
		0				1				2				3			
		q															
		0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0					+7,90588	0					0	+7,90588				
	1					+1,91408	+1,05071					+0,18734	+0,99044				
	2					+2,41738	-0,53109					-0,53109	+2,80869				
	3					-2,68736	-1,31127					+0,06482	-1,33305				
1	0					+1,91408	+0,18734					+1,05071	+0,99044				
	1					+10,75702	-0,43376					-0,43376	+5,32984				
	2					-0,38664	+0,12608					-0,13028	-0,17130				
	3					+2,36344	+0,11220					+0,11220	+1,17015				
2	0					+2,41738	-0,53109					-0,53109	+2,80869				
	1					-0,38664	-0,13028					+0,12608	-0,17130				
	2					+3,98207	+0,31008					+0,31008	+3,72429				
	3					+1,16772	+0,58816					+0,06860	+0,99044				
3	0					-2,68736	+0,06482					-1,31127	-1,33305				
	1					+2,36344	+0,11220					+0,11220	+1,17015				
	2					+1,16772	+0,06860					+0,58816	+0,93470				
	3					+7,93482	+0,18251					+0,18251	+3,96129				

и в соответствии с формулами (IV-27) величины $\Lambda_{ps}^{(c)}$ будут иметь значения, приведенные в таблице 5. Следует заметить, что в таблице 5 приведены только те значения $\Lambda_{ps}^{(c)}$, которые относятся или к четным p и s или нечетным p и s , ибо если одно из этих чисел четное, а другое нечетное, то в силу симметрии полюса (рис. 79) согласно равенству (П_{13-13b}) все коэффициенты Λ_{nkmq} становятся равными нулю и необходимость в вычислении таких Λ_{ps} отпадает.

Поскольку рассматривается только продольное поле, то ввиду его симметрии относительно оси полюса $\vartheta = 0$ (рис. 81, 82) в разложениях потенциала и индукции в ряды Фурье по ϑ синусоидальные члены будут отсутствовать. Поэтому отпадает также необходимость в вычислении коэффициентов L_{nkmq} , а достаточно вычислить только Λ_{nkmq} .

Используя для этой цели формулу (П_{13-13a}) и данные таблицы 5, получим результаты, приведенные в таблице 6. При этом, поскольку при $n + k =$ четному числу гармоники потенциала и индукции в силу особой симметрии (рис. 79) оказываются равными нулю, то вычислять соответствующие коэффициенты Λ_{nkmq} нет необходимости, и они в таблице 6 отсутствуют (ср. табл. 2 и 3).

Подставляя данные таблиц 4 и 6 в формулы (IV-21b, 22a, 20a), можно определить искомые гармоники потенциала u_{nk} . В таблице 7 приведены их величины в первом и втором приближениях. Как видно, разница между первым и вторым приближениями получается сравнительно небольшой.

По данным таблицы 7 с помощью формулы (П₁₃₋₅₀) можно найти искомые гармоники индукции в воздушном зазоре Φ_{nk} . Значения этих гармоник приведены в таблице 8.

Таблица 7

Гармоники потенциала u_{nk}

n	k			
	0	1	2	3
Первое приближение				
0	—	-0,018767	—	-0,000972
1	-0,038868	—	+0,001081	—
2	—	+0,003001	—	+0,00139
3	-0,000880	—	+0,000345	—
4	—	+0,002643	—	-0,000373
5	+0,000548	—	-0,002417	—
6	—	-0,001530	—	+0,001196
7	+0,000463	—	+0,001142	—
8	—	-0,000016	—	+0,000197
Второе приближение				
0	—	-0,019433	—	-0,001003
1	-0,039153	—	+0,001062	—
2	—	+0,002872	—	+0,000129
3	-0,001000	—	+0,000261	—

Таблица 8

Амплитуды гармоник индукции в зазоре Φ_{nk}

n	k			
	0	1	2	3
0	—	-2,0474	—	-0,2178
1	-6,7581	—	+0,2223	—
2	—	+0,6625	—	+0,0383
3	-0,2500	—	+0,0928	—
4	—	+0,7110	—	-0,1145
5	+0,1512	—	-0,7125	—
6	—	-0,4448	—	+0,3920
7	+0,1367	—	+0,3578	—
8	—	-0,0050	—	+0,0675

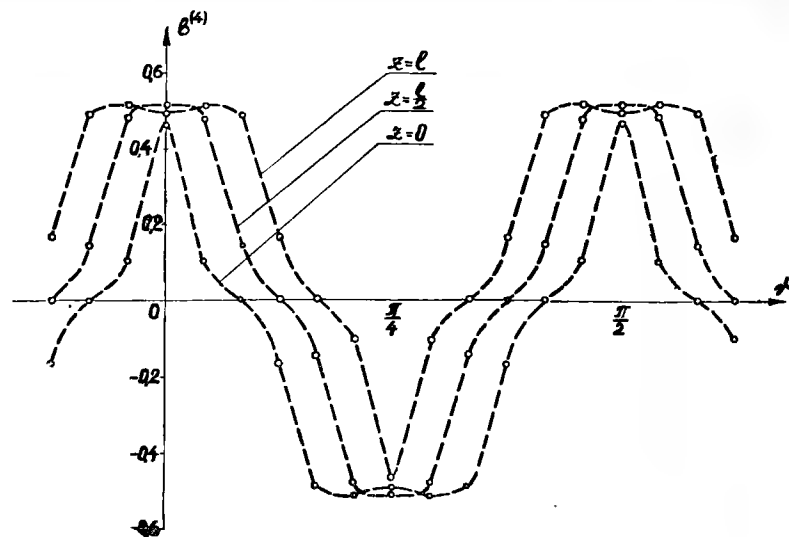


Рис. 84. Распределение индукции в зазоре вдоль окружности машины в крайних и среднем поперечных сечениях.

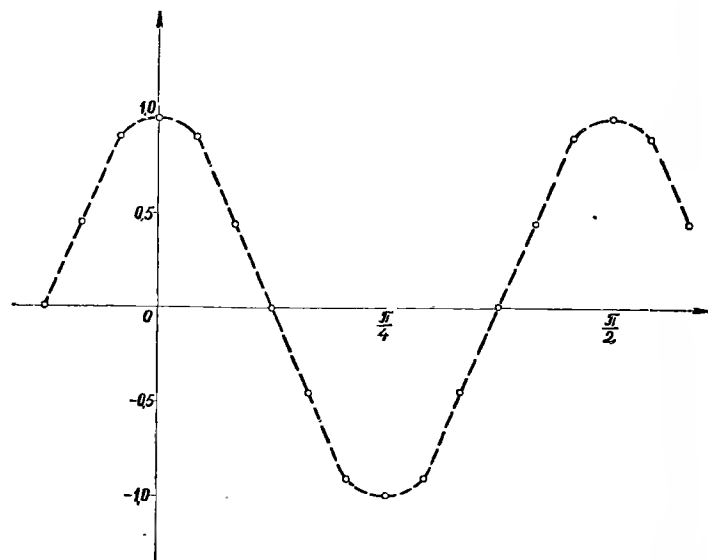


Рис. 85. Усредненная (по длине машины) кривая распределения индукции вдоль окружности машины.

На основании данных таблицы 8 на рис. 84 приведены кривые распределения индукции в трех поперечных сечениях машины: в середине пакета статора ($z = z_1 + \frac{l}{2}$) и на его краях ($z = z_1$, $z = z_2$). Как видно из рис. 84, магнитный поток на краях пакета статора распределяется между северным и южным полюсами неодинаково, в силу чего в этих сечениях имеет место значительная постоянная составляющая потока. Это явление, не имеющее места в обычных явнополюсных машинах и обусловленное наличием боковых скосов у когтеобразных полюсов, по-видимому, оказывает заметное влияние на электромагнитные процессы в стали статора и должно, поэтому, послужить предметом особого изучения.

На рис. 85 приведена еще зависимость от θ величины среднего значения индукции вдоль длины машины, т. е. величины индукции, полученной путем суммирования лишь гармоник, относящихся к значению $k=0$ (первый столбец в таблице 8). Поскольку э.д.с. в произвольном проводнике обмотки статора пропорциональна именно среднему по длине проводника значению индукции, то кривая рис. 85 является одновременно и кривой э.д.с. проводника обмотки статора. Эта кривая, как видно, оказывается близкой к синусоиде. Причиной этого являются, как показано в § 3 главы VI, боковые скосы полюсов.

Помимо кривой э.д.с., при холостом ходе машины (рис. 85) изложенным выше методом могут быть также исследованы и более сложные явления: в частности, например, продольная и поперечная реакция якоря, распределение потока в станине, шпильке статора и т. п. Эти явления при наличии бокового скоса полюсов, и в особенности при их синусоидальной форме (см. гл. VI), существенно отличаются от аналогичных явлений в обычных явнополюсных машинах; поэтому их изучение представляет значительный интерес для практики проектирования.

ГЛАВА V

ПОТОКИ РАССЕЙНИЯ В МАШИНАХ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Как уже указывалось в главе II, в машинах с когтеобразными полюсами потоки междуполюсного рассеяния имеют повышенную величину и играют довольно серьезную роль в общем рабочем процессе машины. В § 5 главы II были приведены основные сведения о потоках рассеяния, в частности было произведено условное подразделение потока рассеяния на отдельные составляющие, относящиеся к различным поверхностям и участкам магнитной цепи. Теперь необходимо исследовать поле рассеяния когтеобразного индуктора более подробно и найти практические пути его расчета.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И УПРОЩАЮЩИЕ ДОПУЩЕНИЯ

Поле рассеяния между когтеобразными полюсами имеет весьма сложный, пространственный характер, и его точный расчет связан с почти непреодолимыми практическими затруднениями. Однако, имея в виду, что междуполюсное рассеяние является все же второстепенным явлением и поэтому при его расчете не требуется высокой точности, целесообразно в целях упрощения исследований и получения более простых расчетных формул ввести ряд упрощающих допущений.

Первое допущение приходится сделать с целью замены рассматриваемого объемного поля поверхностным. Идя по этому пути, можно заметить, что с помощью ряда силовых поверхностей¹ рассматриваемое объемное поле всегда можно подразделить на отдельные участки в виде слоев. Поле внутри

¹ Под силовой поверхностью здесь, как и обычно, понимается поверхность, в любой точке которой вектор индукции B касателен к поверхности. Иначе говоря, силовая поверхность представляет собой множество силовых линий, каждая из которых целиком лежит на этой поверхности.

такого слоя очевидно будет определено целиком, если будут известны граничные условия, т. е. распределение магнитной индукции или магнитного потенциала вдоль поверхностей, ограничивающих рассматриваемый слой. Поэтому рассмотрение объемного поля слоя может быть заменено рассмотрением поля на его боковых поверхностях (т. е. на поверхностях раздела между слоями). При достаточно близком расположении этих поверхностей (т. е. при достаточно малой толщине слоя) распределение поля на них будет очевидно мало различаться, и тогда можно считать их приближенно равными. При этом сложное объемное поле данного слоя превращается в более простое поверхностно-параллельное поле, которое с некоторым приближением можно рассматривать независимо от полей других соседних слоев.

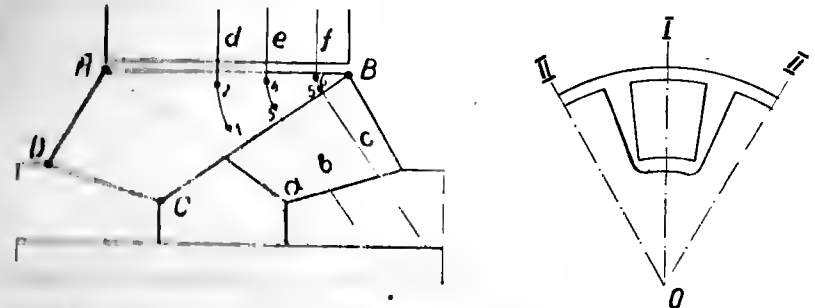


Рис. 86. К замене пространственного поля рассеяния между когтеобразными полюсами поверхностными полями:
 a, b, c — силовые поверхности, перпендикулярные внутренней поверхности полюса BC; d, e, f — поперечные плоскости, перпендикулярные оси машины.

Подразделив, таким образом, сложное пространственное поле на ряд достаточно тонких слоев и исследуя каждый из этих слоев независимо от других, можно затем, суммируя полученные результаты, найти приближенную картину и для искомого пространственного поля.

Второе допущение необходимо сделать при построении граничных поверхностей между отдельными слоями. Выше указывалось, что эти поверхности должны быть силовыми, однако поскольку рассматриваемое поле рассеяния при этом еще неизвестно, то нельзя точно построить и силовые поверхности. Поэтому поверхности раздела между слоями можно построить лишь приблизительно, основываясь главным образом на соображении, что силовые поверхности должны пересекаться со стальными поверхностями полюсов практически под прямым углом.

Исходя из этого соображения, нетрудно прийти к выводу,

что искомые граничные поверхности между отдельными слоями поля междуполюсного рассеяния при когтеобразных полюсах должны иметь вид конусов a, b, c (рис. 86), образующие которых располагаются перпендикулярно к внутренней скошенной поверхности полюса BC , а оси совпадают с осью ротора, так что направляющие окружности конусов встречаются с боковыми поверхностями полюсов под прямыми углами¹. Чтобы сохранить перпендикулярность также и по отношению к поверхности расточки статора, необходимо постепенно перевести конические поверхности в плоскости d, e, f , перпендикулярные к оси машины. С этой целью следует деформировать конические поверхности таким образом, чтобы вблизи воздушного зазора образовались тороидальные поверхности 1—2, 3—4, 5—6, осуществляющие плавные переходы от конусов к плоскостям.

Полученное построение (рис. 86) позволяет приближенно заменить сложное пространственное поле междуполюсного рассеяния рядом более простых слоевых полей, которые в первом приближении можно считать не связанными друг с другом поверхностными полями. Однако расчет даже таких упрощенных поверхностных полей все же довольно сложен. Поэтому целесообразно сделать третье упрощение, которое позволило бы привести рассматриваемые поверхностные конические поля к плоскопараллельным. Из соображений симметрии можно заметить, что для выяснения общей картины поля индуктора машины достаточно рассмотреть лишь один его участок — одно полюсное деление, ограниченное плоскостями симметрии I и II (рис. 86), проходящими через продольные оси двух соседних полюсов. Соответствующие этому полюсному делению части конических поверхностей при достаточно большом числе полюсов имеют сравнительно небольшую кривизну, и если их развернуть в плоскость, то в первом приближении можно полагать, что поле рассеяния при этом остается без изменения. Пользуясь такими развертками, можно представить исследуемое поле в виде ряда плоскопараллельных полей, примерный вид которых изображен на рис. 87. Такие поля можно, как известно, аналитически исследовать с помощью метода конформных преобразований, однако на этом пути имеется ряд серьезных затруднений.

Одно из таких затруднений состоит в том, что поля, изображенные на рис. 87, содержат не две, как обычно, а четыре стальные эквипотенциальные поверхности: полюс северной

¹ Последнее имеет место, вообще говоря, только в том случае, когда боковые поверхности полюсов представляют собой плоскости, проходящие через ось ротора. Это условие в практических случаях часто бывает нарушено, и тогда сечение коническими поверхностями можно считать лишь приближенным способом перехода к плоскому полю.

полярности, полюс южной полярности, пакет статора и замыкающее кольцо полюсов северной (или южной) полярности. Все эти поверхности имеют, вообще говоря, разные магнитные потенциалы, однако в целях простоты целесообразно пренебречь различиями м.д.с. вдоль стальных поверхностей и тогда можно считать, что:

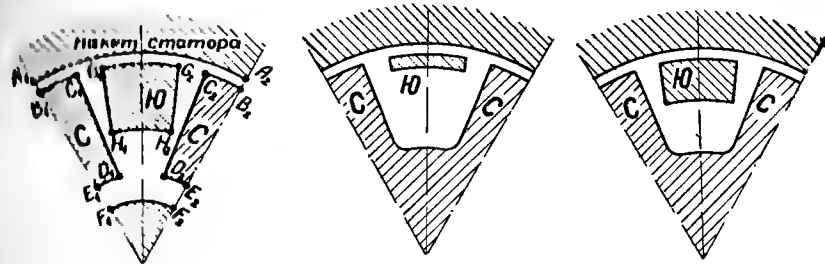


Рис. 87. Примерный вид плоскопараллельных полей, являющихся составляющими пространственного поля рассеяния между когтеобразными полюсами.

а) полюса северной полярности и их замыкающее кольцо имеют магнитный потенциал, равный $+U$. Из соображений симметрии такое же значение потенциала будет иметь место вдоль перпендикуляра E_1F_1 или E_2F_2 , опущенного из середины внутренней поверхности полюса (точка E_1 или E_2) на поверхность замыкающего кольца. В результате эквипотенциальная поверхность, характеризуемая потенциалом $+U$, принимает вид ломаной линии $B_1C_1D_1E_1F_1F_2E_2D_2C_2B_2$;

б) полюса южной полярности имеют магнитный потенциал, равный $-U$ (контур $G_1H_1H_2G_2G_1$);

в) ввиду того что расточка статора расположена на одинаковых расстояниях от полюсов обеих полярностей и воспринимает от них равные потоки, то ее магнитный потенциал можно принять равным среднему значению потенциалов полюсов, т. е. $\frac{+U - U}{2} = 0$ (линия A_1A_2).

В результате, поля на рис. 87 оказывается возможным заменить обобщенной трехпотенциальной картиной рис. 88, откуда любое поле на рис. 87 можно получить как частный случай.

Вторая трудность исследования полей, изображенных на рис. 87 и 88, заключается в том, что эти поля занимают многосвязные области. Даже обобщенная картина на рис. 88 расчленена, как нетрудно заметить, в двухсвязной области, ограниченной наружным контуром $A_1B_1C_1D_1E_1F_1F_2E_2D_2C_2B_2A_2A_1$ и внутренним контуром $G_1H_1H_2G_2G_1$. Многосвязные об-

ласти, как известно, нельзя взаимно однозначно и непрерывно отобразить на односвязные [62]. Поэтому поле на рис. 88 не может быть конформно преобразовано в простейшее поле (например, между двумя параллельными плоскостями), и задача аналитического исследования такого поля резко осложняется.

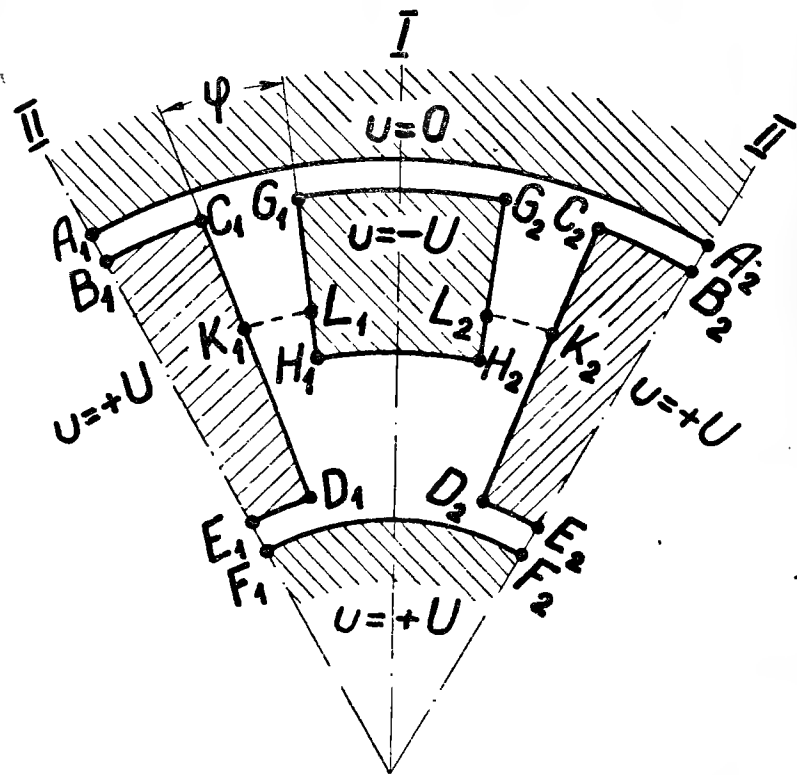


Рис. 88. Обобщенная картина плоскопараллельных составляющих полей рассеяния между когтеобразными полюсами.

Для преодоления этого затруднения можно было бы преобразовать рис. 88 таким образом, чтобы при сохранении в основном характера поля рассеяния между полюсами перейти к односвязной области. Одно из возможных решений этой задачи представлено на рис. 89. Отличие картины рис. 89 от рис. 88 заключается, по существу, только в том, что вместо гладкой поверхности статора и ломаных поверхностей полюсов имеются гладкие поверхности полюсов и ломаная поверхность статора. Нетрудно понять, что поскольку при этом край-вой эффект вблизи углов ломаных поверхностей сохраняет

свой характер, то на поле междуполюсного рассеяния преобразование рис. 89 не должно оказать существенного влияния. В то же время область, изображенная на рис. 89, является уже односвязной и может быть конформно преобразована к одному из простейших видов поля.

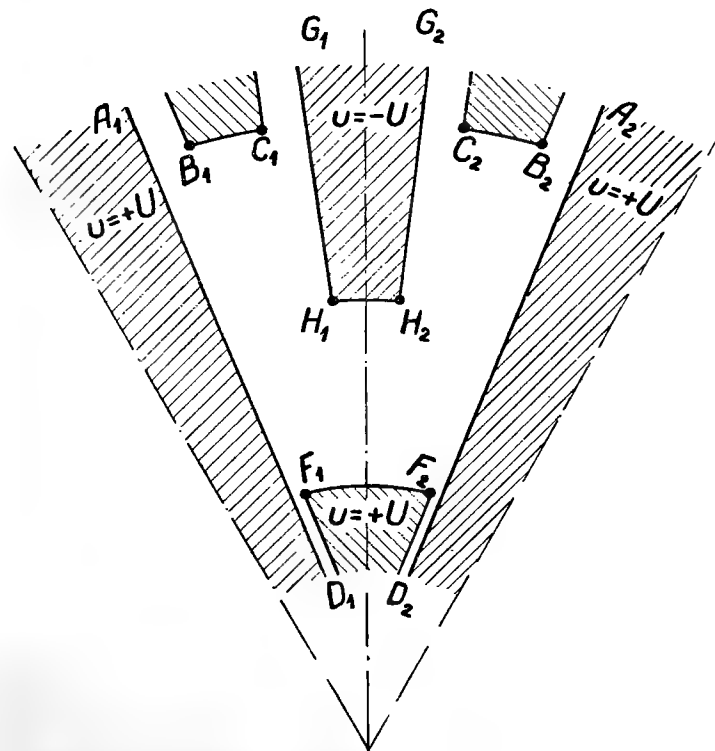


Рис. 89. Возможные преобразования границы поля рис. 88 с целью устранения двусвязности области поля.

Однако практическое осуществление конформного преобразования области $A_1D_1F_1F_2D_2A_2B_2C_2G_2H_2H_1G_1C_1B_1A_1$ представляет все же весьма значительные трудности. Причиной этого является не только сложность формы контура, ограничивающего область рис. 89, но, главным образом, наличие трех потенциалов на этом контуре: потенциала $+U$ на участке $A_1D_1F_1F_2D_2A_2$, потенциала $-U$ на участке $G_1H_1H_2G_2$ и потенциала, равного нулю, на участке $A_1B_1C_1G_1$ и $G_2C_2B_2A_2$. Конформное преобразование такой трехпотенциальной картины — практически трудно разрешимая задача.

Таким образом, непосредственное решение поля для представленной на рис. 88 области встречает почти непреодолимые трудности. Приходится поэтому делать еще более значительные упрощения задачи, которые позволили бы в какой-то мере приблизиться к ее практическому разрешению.

Очень эффективным, хотя и не вполне точным способом расчета поля является искусственная разбивка его на отдельные области с последующей идеализацией этих областей. Так, область поля, изображенную на рис. 88, можно подразделить линиями K_1L_1 и K_2L_2 на две части: верхнюю (контур $A_1B_1C_1K_1L_1G_1G_2L_2K_2C_2B_2A_2A_1$) и нижнюю (контур $K_1D_1E_1F_1F_2E_2D_2K_2L_2H_2H_1L_1K_1$). Далее можно предположить, что картина поля в верхней части мало отличается от поля идеализированного простейшего контура, изображенного на рис. 90, а картина

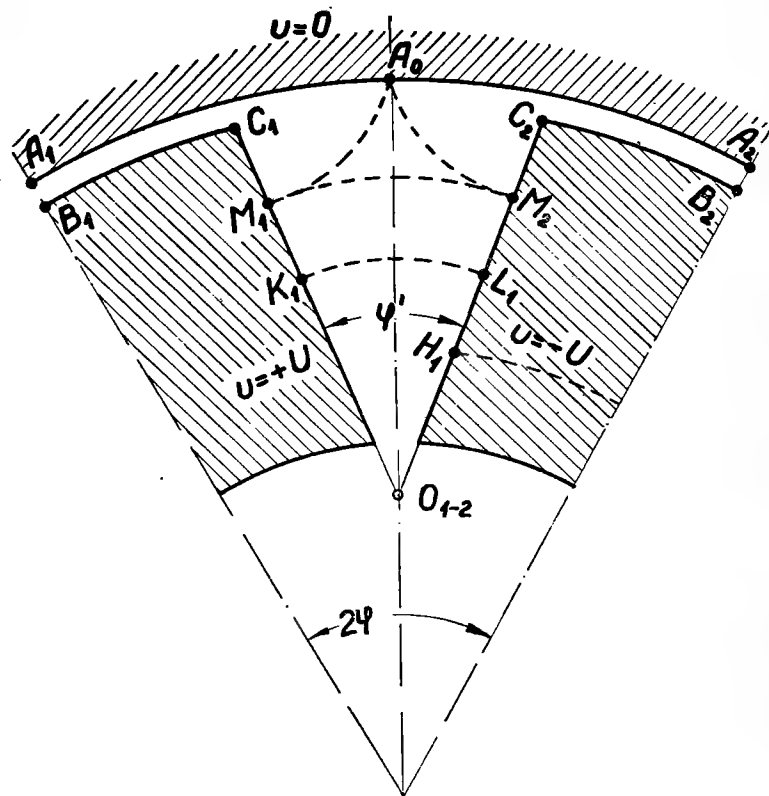


Рис. 90. Упрощенный контур к расчету поля рассеяния в верхней части рис. 88.

поля в нижней части рис. 88 — от поля, приведенного на рис. 91. Отличие рис. 90 и 91 от соответствующих частей рис. 88 заключается по существу лишь в том, что в первом случае боковые поверхности полюсов C_1D_1 и G_1H_1 оказываются продолженными до взаимного пересечения в точке O_{1-2}

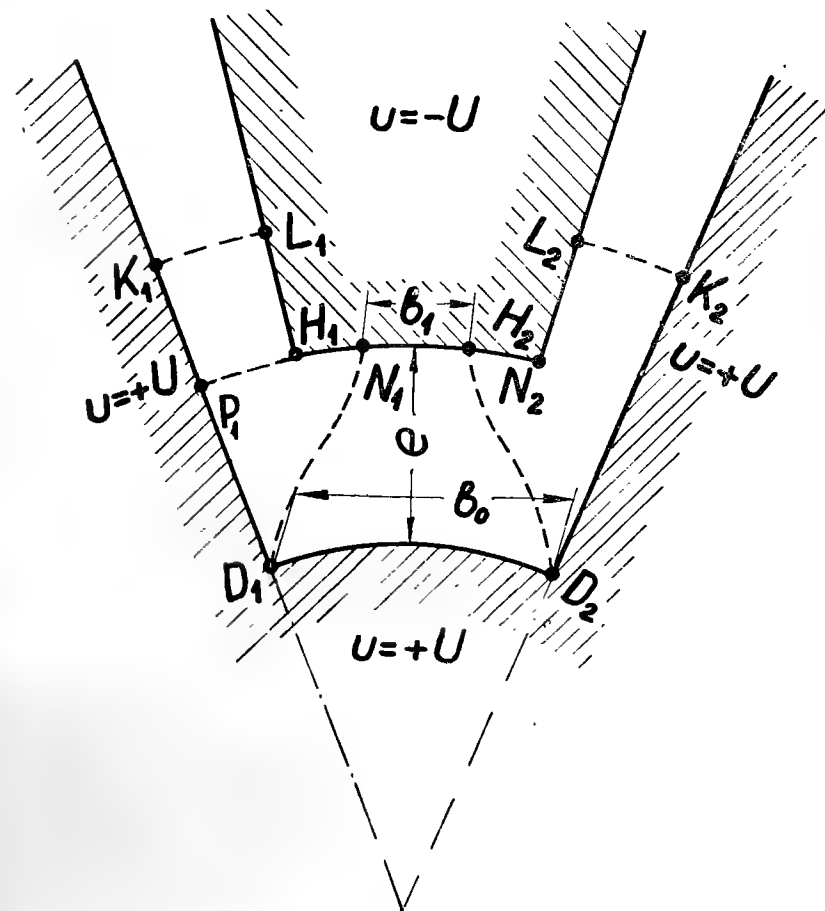


Рис. 91. Упрощенный контур к расчету поля рассеяния в нижней части рис. 88.

(рис. 90), а во втором случае эти поверхности продолжают в противоположную сторону и обе уходят в бесконечность (рис. 91). При этом предполагается, что картина поля, имеющая место на рис. 90, используется для подстановки в рис. 88 только в своей верхней части — от дуги A_1A_2 до некоторой

линии K_3L_1 и, таким образом, не соответствующая рис. 88 нижняя часть рис. 90 оказывается отсеченной и в дальнейшем не используется. Однако наличие этой нижней части на рис. 90 оказывается полезным в том смысле, что резко упрощает форму исследуемой области поля. Аналогичным образом картина поля, изображенная на рис. 91, используется для подстановки в рис. 88 только в своей нижней части — до линии $K_1L_1H_1H_2L_2K_2$ — а несоответствующая рис. 88 верхняя часть рис. 91 отсекается и в дальнейшем не используется; в то же время ее наличие значительно упрощает форму области поля на рис. 91.

Основное допущение, которое делается при переходе от рис. 88 к рис. 90 и 91, состоит, таким образом, в том, что линии K_1L_1 и K_2L_2 на всех трех рисунках совпадают. Это предположение является, очевидно, приближенным, так как в картинах поля на рис. 90 и 91, по-видимому, нельзя найти ни одной пары силовых линий, которые совершенно точно совпадали бы друг с другом. Однако поскольку на всех трех рисунках линии K_1L_1 и K_2L_2 близки к дуге окружности одного и того же радиуса, то в первом приближении их все же можно считать совпадающими и на этом основании заменить картину поля рис. 88 суммой двух картин, составленной из соответствующих частей рис. 90 и 91.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ МЕЖДУПОЛЮСНОГО РАССЕЯНИЯ

Представленная на рис. 90 область поля характерна тем, что в ней, помимо рассеяния, имеет место также и полезный поток. К этому потоку относятся все силовые линии, пересекающие поверхность расточки статора A_1A_2 ; поэтому и соответствующие поверхности полюсов $B_1C_1M_1$ и $B_2C_2M_2$, через которые проходят силовые линии потока статора, должны быть при расчете междуполюсного рассеяния исключены из рассмотрения. Крайние точки этих поверхностей M_1 и M_2 характерны, как известно, тем, что вышедшие из них силовые линии потока, обусловленного краевым эффектом около углов полюсов C_1 и C_2 , сходятся в одной и той же точке поверхности статора A_0 , а все остальные линии, вышедшие из точек, лежащих ниже M_1 или M_2 , не достигают поверхности расточки статора, а переходят непосредственно с полюса на полюс и относятся поэтому к полю рассеяния.

Таким образом, искомое тангенциальное (т. е. направленное по дугам) поле междуполюсного рассеяния заключено в пространстве $M_1A_0M_2L_1K_1M_1$ (рис. 90). Для его расчета

необходимо решить две задачи: во-первых, определить местоположение точек M_1 и M_2 , и, во-вторых, произвести расчет поля в пятиугольнике $M_1A_0M_2L_1K_1M_1$.

Исследование поля полюсов вблизи расточки статора

При решении первой из указанных задач — определения точек M_1 и M_2 — целесообразно заметить, что ввиду малости отрезков A_1B_1 (воздушный зазор δ) и C_1M_1 (активная часть боковой поверхности полюса) по сравнению с полюсным деле-

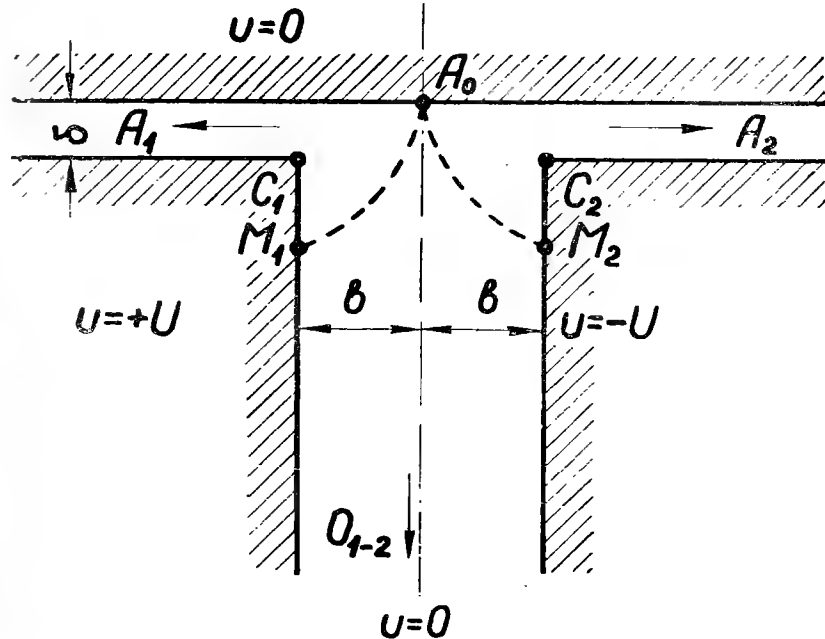
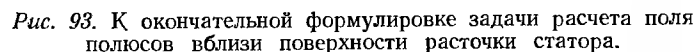


Рис. 92. Упрощенный контур для расчета поля полюсов вблизи поверхности расточки статора.

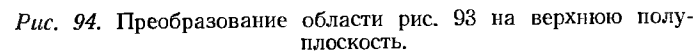
нием A_1A_2 , расстоянием между углами полюсов C_1C_2 и радиусом расточки статора $OA_1 = OA_2$ можно распрямить дуги A_1A_2 , B_1C_1 и C_2B_2 , превратив их в прямые линии, и тогда для исследования поля полюсов вблизи статора и определения точек M_1 и M_2 можно будет воспользоваться более простой картиной, представленной на рис. 92.

Согласно рис. 92 для исследования поля полюсов вблизи расточки статора и определения точек M_1 и M_2 необходимо рассчитать поле между бесконечной плоскостью A_1A_2 и находящимися от нее на расстоянии δ двумя двугранными пря-

С целью приведения трехпотенциальной картины рис. 92 к двухпотенциальной важно заметить, что в силу соображений симметрии нейтральная линия A_0O_{12} на всем своем протяжении должна обладать одинаковым потенциалом, равным нулю. Поэтому поле на рис. 92 может быть разделено на две одинаковые части $A_1C_1O_{12}A_0$ и $A_2C_2O_{12}A_0$, каждая из которых является двухпотенциальной. Взяв теперь для исследования лишь одну из этих частей (например, $A_1C_1O_{12}A_0$) и ориентируя ее наиболее удобным образом относительно системы координат, получим картину рис. 93.



Требуется исследовать поле между двумя двугранными углами со взаимно параллельными сторонами, находящимися друг от друга на расстояниях δ и b , причем потенциал внешнего угла равен нулю, а внутреннего $+U$.



Исследуемая область (рис. 93) представляет собой четырехугольник $A_0A_1C_1O_{12}$. Для конформного преобразования этой области в верхнюю полуплоскость (рис. 94) можно воспользоваться известным интегралом Кристоффеля—Шварца, который в применении к четырехугольнику будет иметь вид:

где a_1, a_2, a_3, a_4 — координаты точек A'_0, A'_1, C'_1 и O'_{12} , являющихся отображениями на плоскость ξ соответствующих вершин четырехугольника, а C, C_1, ξ_0 — произвольные постоянные.

Поскольку углы при вершинах четырехугольника $A_0A_1C_1O_{12}$ согласно рис. 93 равны:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при вершине } A_0: \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \\ \text{при вершинах } A_1 \text{ и } O_{12}: \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0 \\ \text{при вершине } C_1: \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\}, \quad (\text{V-1a})$$

то интеграл (V-1) можно переписать в виде:

$$z = C \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sqrt{\xi - a_3}}{(\xi - a_2)(\xi - a_4) \sqrt{\xi - a_1}} \cdot d\xi + C_1. \quad (\text{V-2})$$

Координаты трех точек можно, как известно, выбрать произвольно. Поэтому удобно положить (рис. 94):

$$a_2 = 0, \quad a_4 = \infty, \quad a_1 = -1, \quad a_3 = a, \quad (\text{V-2a})$$

и тогда равенство (V-2) примет вид:

$$z = C \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi + C_1. \quad (\text{V-3})$$

Для определения неизвестных в этом выражении постоянных C , C_1 , ξ_0 и a можно воспользоваться свойствами точек A_0 , A_1 и O_{12} .

В точке A_0 согласно рис. 93 и 94 координата $z = 0$, а $\xi = -1$. Подставив эти значения в равенство (V-3), после небольших преобразований найдем:

$$C_1 = C \int_{-1}^{\xi_0} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi. \quad (\text{V-3a})$$

Используя это выражение для подстановки в равенство (V-3) и суммируя оба интеграла, получим окончательное выражение интеграла Кристоффеля—Шварца для рассматриваемого случая

$$z = C \int_{-1}^{\xi} \frac{1}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi. \quad (\text{V-4})$$

Переходя к рассмотрению особенностей точек A_1 и O_{12} , следует обратить внимание на то, что в этих точках функция

$z(\xi)$ теряет непрерывность и испытывает скачки. Так, если конец вектора $\bar{z}$ перемещается от точки A_0 к точке A_1 , скользя при этом по линии A_0A_1 , то мнимая часть величины z будет постоянна и равна нулю. Поэтому для величины z в этом случае можно написать:

$$z' = x + i \cdot 0. \quad (\text{V-5a})$$

Если теперь, совершая дальнейший обход контура $A_0A_1C_1O_{12}$, конец вектора z будет возвращаться из точки A_1 по линии A_1C_1 , то мнимая часть величины z окажется равной уже не нулю, а величине δ (рис. 93) и для этого случая можно написать:

$$z'' = x + i \cdot \delta. \quad (\text{V-5b})$$

Сравнивая равенства (V-5a и b), нетрудно прийти к выводу, что при обходе контура $A_0A_1C_1$ функция $z(\xi)$ в точке A_1 испытывает скачок

$$\Delta z_A = z'' - z' = i\delta. \quad (\text{V-5c})$$

Аналогичным образом нетрудно прийти к выводу, что при обходе контура $C_1O_{12}A_0$ функция $z(\xi)$ в точке O_{12} испытывает скачок

$$\Delta z_0 = (iy) - (b + iy) = -b. \quad (\text{V-5d})$$

Рассматривая далее соответствующие точки A'_1 и O'_{12} на плоскости ξ , следует заметить, что для определения скачков функции $z(\xi)$ в этом случае необходимо сравнить ее значения в ближайших точках справа и слева от рассматриваемой точки. Обозначая соответствующие координаты через ξ_n и ξ_l и используя выражение (V-4), можно для искомого прираще-ния написать:

$$\begin{aligned} \Delta z = z(\xi_n) - z(\xi_l) &= C \int_{-1}^{\xi_n} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi - \\ &- C \int_{-1}^{\xi_l} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi = C \int_{\xi_n}^{\xi_l} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a}{\xi + 1}} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{V-6})$$

Как видно из этого выражения, для определения скачка функции $z(\xi)$ в точках A'_1 или O'_{12} необходимо вычислить значение интеграла (V-4) на пути от точки ξ_l до точки ξ_n , которые расположены в непосредственной близости от рассматриваемой точки A'_1 или O'_{12} слева и справа от нее. Так как путь интегрирования при этом может быть любым, то,

имея в виду потерю непрерывности в самих точках A'_1 или O'_{12} , удобно выбрать этот путь в виде полуокружностей, обходящих точки потери непрерывности. Так, для точки A'_1 эта полуокружность должна иметь центр в точке A'_1 (рис. 95), а ее радиус ρ должен быть весьма малым и в пределе стремиться к нулю. Для точки O'_{12} , поскольку она находится в бесконечности, приходится брать полуокружность с центром в начале координат и с радиусом R весьма большой величины, в пределе стремящейся к бесконечности (рис. 95).

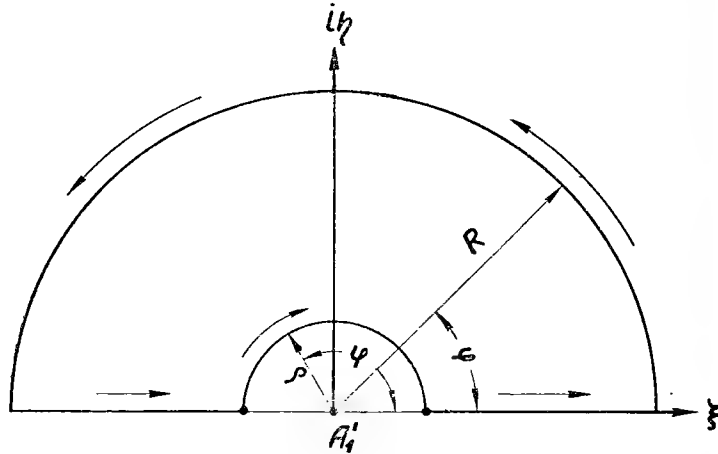


Рис. 95. Контур интегрирования на плоскости ξ .

Для выбранных полуокружностей величину независимой переменной ξ можно представить в виде:

$$\text{для точки } A'_1 \quad \xi = \rho e^{i\varphi}, \quad (\text{V-6a})$$

$$\text{для точки } O'_{12} \quad \xi = R e^{i\varphi}, \quad (\text{V-6b})$$

где через φ обозначен угол, составленный радиусом с осью вещественных. При этом для начальной и конечной точек обхода по полуокружностям согласно рис. 95 будем иметь:

$$\text{для точки } A'_1 \quad \left. \begin{array}{l} \xi_{\text{л}} \dots \varphi = \pi \\ \xi_{\text{п}} \dots \varphi = 0 \end{array} \right\}, \quad (\text{V-6c})$$

$$\text{для точки } O'_{12} \quad \left. \begin{array}{l} \xi_{\text{л}} \dots \varphi = 0 \\ \xi_{\text{п}} \dots \varphi = \pi \end{array} \right\}, \quad (\text{V-6d})$$

Подставляя теперь выражения (V-6a и b) в равенство (V-6) и изменяя пределы интегрирования согласно (V-6c и d), после сокращений будем иметь:

для точки A'_1

$$\Delta z_A = C \int_{\pi}^0 \sqrt{\frac{\rho e^{i\varphi} - a}{\rho e^{i\varphi} + 1}} \cdot i d\varphi, \quad (\text{V-7a})$$

для точки O'_{12}

$$\Delta z_0 = C \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{R e^{i\varphi} - a}{R e^{i\varphi} + 1}} \cdot i d\varphi. \quad (\text{V-7b})$$

Переходя в этих выражениях к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ и производя затем интегрирование, получим:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta z_A = \pi C \sqrt{a} \\ \Delta z_0 = i\pi C \end{array} \right\}. \quad (\text{V-7c})$$

Сравнивая равенства (V-7c) с (V-5c и d), нетрудно получить два уравнения для определения неизвестных постоянных C и a :

$$C \sqrt{a} = i \frac{b}{\pi}, \quad (\text{V-8a})$$

$$C = i \frac{b}{\pi}. \quad (\text{V-8b})$$

Величина C полностью определяется выражением (V-8b), а для величины a из уравнений (V-8a и b) имеем:

$$a = \left(\frac{b}{b}\right)^2. \quad (\text{V-8c})$$

Таким образом, постоянные a и C стали известны и выражение (V-4) приобрело полную определенность.

Интеграл (V-4) можно выразить в элементарных функциях. Вводя подстановку

$$\frac{\xi - a}{\xi + 1} = t^2, \quad (\text{V-9a})$$

нетрудно привести равенство (V-4) к виду:

$$z = C \int_{\infty}^t \frac{2(a+1)t^2}{(a+t^2)(1-t^2)} dt. \quad (\text{V-9b})$$

Разлагая далее подынтегральное выражение на элементарные дроби, будем иметь:

$$z = C \int_{\infty}^t \left[\frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a} + it} + \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a} - it} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt, \quad (\text{V-9c})$$

откуда после почленного интегрирования получим:

$$z = C \left[-\frac{\sqrt{a}}{i} \ln \frac{\sqrt{a} + it}{\sqrt{a} - it} + \ln \frac{1+t}{1-t} \right]_{\infty}^t. \quad (V-9d)$$

Подставляя пределы интегрирования и производя несложные преобразования с учетом равенств (V-8b и c), окончательно будем иметь:

$$z = \frac{ib}{\pi} \left[\ln \frac{t+1}{t-1} + i\alpha \ln \frac{t-i\alpha}{t+i\alpha} \right], \quad (V-10)$$

причем для сокращения обозначено:

$$\alpha = \sqrt{a} = \frac{b}{b}. \quad (V-10a)$$

Для того чтобы иметь возможность практически использовать выражение (V-10), необходимо еще преобразовать поле верхней полуплоскости ζ в простое однородное поле полосы w

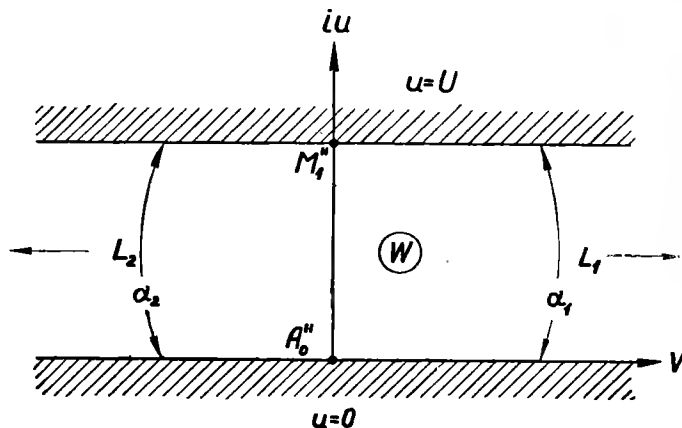


Рис. 96. Поле комплексного потенциала для области рис. 93.

между двумя параллельными плоскостями, несущими потенциалы 0 и U (рис. 96). Такое поле, как известно, удобно тем, что любая его точка $w = v + iu$ является комплексным потенциалом соответствующей точки на плоскости ζ или z . Поэтому, задавая произвольные значения комплексного потенциала w , можно по соответствию точек w , ζ и z определить те точки исследуемого поля на плоскости z , в которых заданный комплексный потенциал имеет место. Тем самым можно определить искомое поле в любой его точке.

Для определения связи между полями ζ и w можно вновь

использовать интеграл Кристоффеля—Шварца, применив его для отображения двуугольника w на верхнюю полуплоскость ζ . Оба угла α_1 и α_2 при вершинах L_1 и L_2 этого двуугольника равны нулю (рис. 96), поэтому интеграл Кристоффеля—Шварца в этом случае будет иметь вид:

$$w = D \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - l_1)(\zeta - l_2)} + D_1, \quad (V-11)$$

где l_1 и l_2 — координаты точек L_1' и L_2' на плоскости ζ , соответствующих точкам L_1 и L_2 двуугольника, а D , D_1 , ζ_0 — произвольные постоянные.

В точках L_1 и L_2 двуугольника w происходит скачок потенциала от 0 до U или обратно. Такие же скачки потенциала будут, очевидно, иметь место и в соответствующих точках L_1' и L_2' на полуплоскости ζ . С другой стороны, поскольку эта же полуплоскость соответствует исследуемой области z , где скачки потенциала происходят в точках A_1 и O_{12} , то для того чтобы комплексный потенциал w отвечал также и плоскости z , необходимо обеспечить совпадение на плоскости ζ точек L_1' и A_1' , а также точек L_2' и O_{12}' . Поэтому в соответствии с рис. 94 в формуле (V-11) необходимо положить

$$l_1 = 0, \quad l_2 = \infty, \quad (V-11a)$$

и тогда выражение (V-11) примет вид:

$$w = D \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} + D_1. \quad (V-11b)$$

Можно для определенности фиксировать еще и третью точку на контуре рис. 96. Целесообразно, например, началу координат ($u = 0$, $v = 0$) привести в соответствие точку A_0'' на плоскости ζ , которая, в свою очередь, является изображением начала координат A_0 на плоскости z .

Тогда, подставляя в выражение (V-11b) значения $w = 0$, $\zeta = 1$, найдем:

$$D_1 = D \int_{-1}^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (V-11c)$$

и выражение (V-11b) еще более упростится:

$$w = D \int_{-1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (V-11d)$$

При определении оставшейся постоянной D можно использовать тот факт, что в точках A_1'' и O_{12}'' величина w испытывает скачки соответственно $+iU$ и $-iU$. В то же время, подставляя в равенство (V-11d) выражения (V-6a и c) или (V-6b и d), нетрудно найти, что согласно (V-11d) приращения функции w должны быть равны:

$$\text{в точке } A_1' \quad \Delta w_A = -i\pi D = +iU,$$

$$\text{в точке } O_{12}' \quad \Delta w_0 = +i\pi D = -iU.$$

Из обоих равенств имеем одинаковый результат:

$$D = -\frac{U}{\pi}. \quad (\text{V-12a})$$

В связи с этим вместо выражения (V-11d) получим:

$$w = -\frac{U}{\pi} \int_{-1}^{\xi} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (\text{V-12b})$$

Производя теперь интегрирование и подставляя пределы, окончательно будем иметь:

$$w = -\frac{U}{\pi} [\ln \xi - \ln(-1)] = iU - \frac{U}{\pi} \ln \xi. \quad (\text{V-13})$$

Выражение (V-13) позволяет найти и обратную зависимость между ξ и w :

$$\xi = e^{(i\pi - \frac{\pi}{U} w)} = -e^{-\frac{\pi}{U} w}, \quad (\text{V-13a})$$

которая более удобна для практических расчетов. Задавая различные значения комплексного потенциала w , по формуле (V-13a) можно определить соответствующие значения ξ . Далее, подставляя эти значения в равенство (V-9a), нетрудно найти также величину t . Наконец, подставляя значения t в формулу (V-10), можно определить искомую величину $z = x + iy$, вещественная и мнимая часть которой дадут координаты той точки исследуемого поля, в которой комплексный потенциал имеет заданное вначале значение $w = v + iu$.

Целью поставленной выше задачи было определение координат точки M_1 (рис. 93), являющейся точкой встречи силовой линии A_0M_1 , вышедшей из нейтральной точки A_0 , с боковой поверхностью полюса. Поскольку точки A_0 и M_1 лежат на одной и той же силовой линии, то они должны, как известно, характеризоваться одним и тем же значением функции потока v . Поскольку, с другой стороны, для точки A_0 значение функции потока известно и, согласно рис. 96, равно $v = 0$, то соответствующая точке M_1 точка M_1'' на плоскости w должна, оче-

видно, лежать на оси ординат $v = 0$. Точное положение точки M_1'' нетрудно найти, если заметить, что согласно рис. 93 значение потенциала в ней равно $u = U$. Таким образом, точка M_1'' должна находиться на пересечении оси ординат $v = 0$ с эквипотенциальной линией $u = U$ (рис. 96), и, следовательно, значение комплексного потенциала для этой точки равно:

$$w_M = 0 + iU = iU. \quad (\text{V-14})$$

Подставив это значение в формулу (V-13a), найдем:

$$\xi_M = -e^{-\pi i} = +1, \quad (\text{V-14a})$$

и, следовательно, точка M_1' располагается на плоскости ξ симметрично точке A_0' (рис. 94).

Подставляя далее значение (V-14a) в равенство (V-9a), с учетом (V-10a) будем иметь:

$$t_M = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}}. \quad (\text{V-14b})$$

В практических задачах воздушный зазор δ всегда во много раз меньше, чем половина междуполусного расстояния b (см. рис. 90). Поэтому согласно равенству (V-10a) можно написать:

$$\alpha \ll 1. \quad (\text{V-15})$$

В связи с этим величина t_M в соответствии с формулой (V-14b) будет всегда вещественной и положительной, но по величине не более, чем $\sqrt{\frac{1}{2}}$:

$$0 < t_M < \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (\text{V-15a})$$

Имея в виду, что $t_M < 1$, первое слагаемое в формуле (V-10) целесообразно переписать следующим образом:

$$\ln \frac{t+1}{t-1} = \ln \frac{1+t}{1-t} - \ln(-1) = \ln \frac{1+t}{1-t} - i\pi. \quad (\text{V-15b})$$

При этом величина логарифма будет всегда вещественной и положительной.

Второе слагаемое в формуле (V-10) при вещественном t можно представить, как известно, в следующем виде:

$$\ln \frac{t-i\alpha}{t+i\alpha} = \ln \frac{\frac{t}{\alpha} + i}{\frac{t}{\alpha} - i} = -2i \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{t}{\alpha}. \quad (\text{V-15c})$$

При t вещественном и положительном величина арккотангенса будет находиться между $\frac{\pi}{2}$ (при $t=0$) и 0 (при $t=\infty$).

Подставляя выражения (V-15b и c) в равенство (V-10), после небольших преобразований с учетом соотношений (V-10a и 14b) получим следующую формулу для определения координат точки M_1 :

$$z_M = b + i \left[\frac{b}{\pi} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{2b}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{2\alpha^2}} \right]. \quad (V-16)$$

Из этого равенства видно, что координата x_M точки M_1 по оси вещественных всегда постоянна и равна b , что, очевидно, соответствует рис. 93.

Координата y_M по мнимой оси зависит от величин b , δ и α . Эту зависимость можно несколько упростить, если отнести координату y_M к расстоянию b :

$$y_M^* = \frac{y_M}{b} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{2\alpha}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{2\alpha^2}}. \quad (V-17)$$

Величина y_M^* , как видно, зависит только от одного параметра — от величины α , представляющей собой согласно выражению (V-10a) отношение зазора δ к половине междуполюсного расстояния b .

На рис. 97 представлена зависимость y_M^* от α , выражаемая формулой (V-17). Из кривой на рис. 97 видно, что для обычно встречающихся значений α , значительно меньших единицы (см. соотношение (V-15), с достаточной для практики точностью можно считать

$$y_M^* \approx 0,56. \quad (V-17a)$$

Таким образом, точка M_1 , в которой происходит переход от полезного потока к потоку междуполюсного рассеяния, располагается от поверхности расточки статора на довольно значительном расстоянии, составляющем 56% от размера b , т. е. 28% от расстояния между полюсами.

Определение тангенциального потока рассеяния

Тангенциальный поток рассеяния $\Phi_{\sigma\tau}$ между котеобразными полюсами образуется, как видно из рис. 88 и 90, между плоскостями M_1K_1 и M_2L_1 , расположенными друг к другу под углом φ' .

Для определения потока $\Phi_{\sigma\tau}$ можно приближенно положить, что рассматриваемые участки M_1K_1 и M_2L_1 являются частями соответствующих бесконечных плоскостей, а поле между M_1K_1 и M_2L_1 — частью поля этих бесконечных плоскостей.

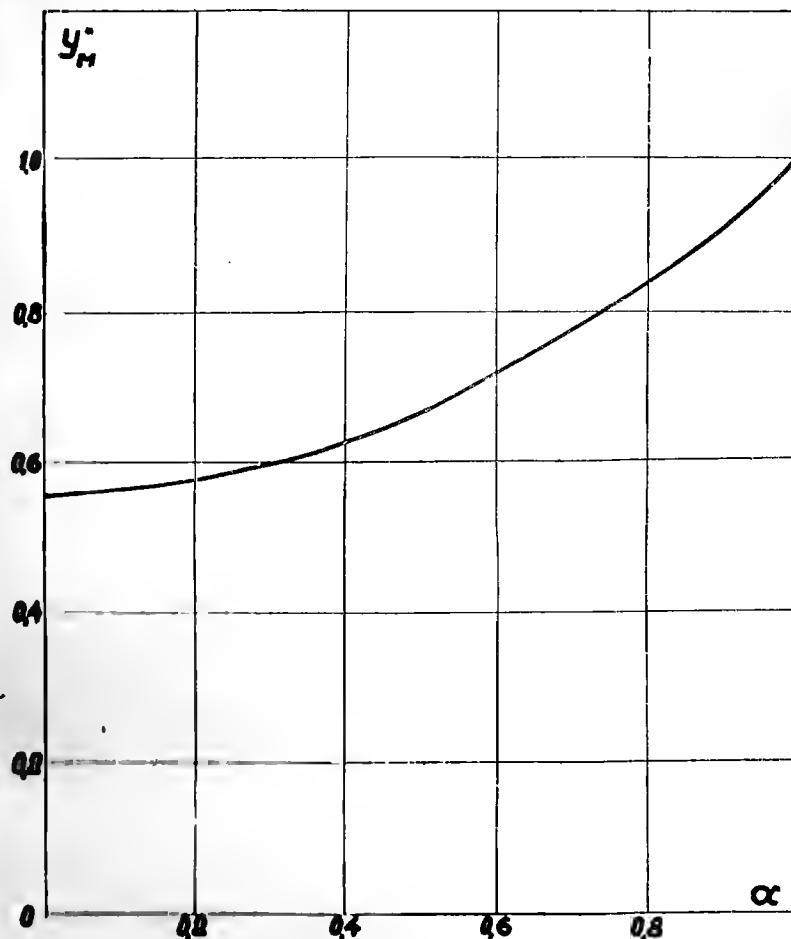


Рис. 97. Зависимость координаты y_M точки M от параметра α .

При таком предположении силовые линии потока $\Phi_{\sigma\tau}$ будут представлять собой, как известно, дуги окружностей, имеющих общий центр в точке O_{12} , лежащей на линии пересечения плоскостей M_1K_1 и M_2L_1 (рис. 90).

Плотность магнитного поля $H_{\sigma\tau}$ вдоль силовой линии в виде дуги окружности имеет постоянное значение, равное отношению м. д. с. между плоскостями $F_{\sigma\tau}$ к длине дуги $\varphi'r$:

$$H_{\sigma\tau} = \frac{F_{\sigma\tau}}{\varphi'r}. \quad (V-18)$$

М. д. с. между плоскостями $F_{\sigma\tau}$ представляет собой, как нетрудно понять с помощью рис. 90, сумму междуполусной м. д. с. F_{NS} , имеющей место между активными поверхностями полюсов, и падения магнитного напряжения в каждом из полюсов $F_{\pi\tau}$, взятого на пути от активной поверхности до рассматриваемой точки T_1 на боковой поверхности (плоскости) полюса (рис. 90 и 98):

$$F_{\sigma\tau} = F_{NS} + 2F_{\pi\tau}. \quad (V-18a)$$

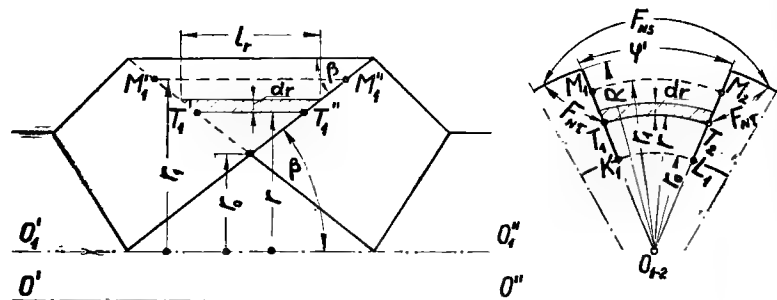


Рис. 98. К расчету тангенциального потока рассеяния между конгеобразными полюсами.

Падение напряжения в полюсе $F_{\pi\tau}$ обычно во много раз меньше междуполусной м. д. с. F_{NS} , поэтому в большинстве практических случаев можно зависимость $F_{\pi\tau}$ от положения точки T_1 учесть приближенно, положив ее пропорциональной расстоянию точки T_1 от активной поверхности полюса:

$$F_{\pi\tau} \approx H_{nr} (R - r), \quad (V-18b)$$

где H_{nr} — радиальная составляющая напряженности поля в полюсе, приближенно принимаемая постоянной во всех его точках.

Тогда м. д. с. $F_{\sigma\tau}$ и напряженность поля $H_{\sigma\tau}$ в точке T будут согласно равенствам (V-18a и 18) зависеть только от радиуса r :

$$H_{\sigma\tau} = \frac{F_{NS} + 2H_{nr}R}{\varphi' r} - \frac{2H_{nr}}{\varphi'}. \quad (V-18c)$$

Если далее рассматривать только тот случай, когда полюс не имеет боковых скосов и, следовательно, его ширина в тангенциальном направлении оказывается постоянной, то тогда точки встречи боковых плоскостей полюса O_{12} (рис. 98) будут в любом сечении находиться на одинаковом расстоянии от оси ротора $O'O''$, а линия пересечения боковых плоскостей $O_1'O_1''$ окажется параллельной этой оси. В связи с этим все точки T_1 ,

характеризующиеся одинаковыми радиусами r и, следовательно, согласно формуле (V-18c) — одинаковой напряженностью поля, окажутся расположенными на линии $T_1'T_1''$, также параллельной оси машины (рис. 98). Картина поля приобретает, таким образом, цилиндрический характер, и использование конических сечений, введенных на рис. 86, становится в этом случае излишним. Вместо этого можно непосредственно рассматривать весь объем, занимаемый тангенциальным потоком рассеяния и имеющий вид цилиндрического сектора, ограниченного снаружи цилиндрической поверхностью радиуса r_1 , с боков — двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и расположенными под углом φ' , а с торцов — двумя взаимно пересекающимися коническими поверхностями с углом конуса при вершине, равном β (рис. 98). Предполагая далее, что указанный объем является частью двугранного угла между бесконечными плоскостями, можно представить силовые трубки в этом объеме в виде отрезков полых цилиндров с внутренним радиусом r , толщиной стенки dr и длиной l_r , которую согласно рис. 98 можно представить в виде:

$$l_r = 2(r - r_0) \operatorname{ctg} \beta. \quad (V-19)$$

Элементарный поток такой трубки сквозь сечение $l_r dr$ с учетом соотношений (V-18c и 19) будет равен:

$$d\Phi_{\sigma\tau} = H_{\sigma\tau} l_r dr = \frac{2\mu_0 \operatorname{ctg} \beta}{\varphi'} \left(\frac{F_{NS} + 2H_{nr}R}{r} - 2H_{nr} \right) (r - r_0) dr. \quad (V-19a)$$

Интегрируя это выражение от радиуса r_0 , на котором пересекаются конические торцовые поверхности, до радиуса r_1 , на котором оканчивается тангенциальное поле рассеяния (точка M_1 на рис. 90 и 98), после небольших преобразований будем иметь:

$$\Phi_{\sigma\tau} = \frac{2\mu_0 \operatorname{ctg} \beta}{\varphi'} (F_{NS} + 2H_{nr}R) \times \left[r_1 - r_0 \left(1 + \ln \frac{r_1}{r_0} \right) - \frac{H_{nr}(r_1 - r_0)^2}{F_{NS} + 2H_{nr}R} \right]. \quad (V-20)$$

Боковые поверхности полюса часто выполняются параллельными (рис. 99). В этом случае для входящих в формулу (V-20) величин φ' , R , r_1 и r_0 согласно рис. 99 можно написать:

$$\varphi' = 2\varphi = 2 \cdot \frac{\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}, \quad (V-21a)$$

$$R = EB = OA - AB - OE, \quad (V-21b)$$

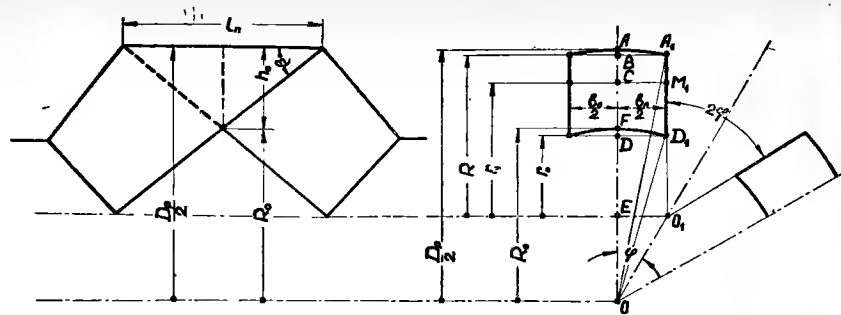


Рис. 99. К определению размеров полюса при параллельных боковых поверхностях.

$$r_1 = EC = EB - BC, \quad (V-21c)$$

$$r_0 = ED = OD - OE. \quad (V-21d)$$

Отрезки OA , AB и OE в соответствии с рис. 99 могут быть определены следующим образом:

$$OA = \frac{D_p}{2}, \quad (V-22a)$$

$$\begin{aligned} AB &= OA - OB = OA - \sqrt{OA_1^2 - BA_1^2} = \\ &= \frac{D_p}{2} - \sqrt{\left(\frac{D_p}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (V-22b)$$

$$OE = EO_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \frac{b_n}{2} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (V-22c)$$

Поэтому выражение (V-21b) для радиуса R примет вид:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{D_p^2 - b_n^2} - \frac{1}{2} b_n \operatorname{ctg} \varphi. \quad (V-22d)$$

Отрезок $BC = A_1 M_1$, согласно изложенному выше, определяется положением точки M_1 , являющейся границей между полезным потоком и потоком междуполюсного рассеяния. В соответствии с рис. 93 и формулой (V-17a) имеем:

$$BC = y_M - \delta = 0,56 \cdot b - \delta. \quad (V-23a)$$

Величина междуполюсного расстояния $2b$ равна разности между полюсным делением τ и шириной полюса (по дуге) b_p :

$$2b = \tau - b_p. \quad (V-23b)$$

Поэтому для отрезка BC можно согласно выражениям (V-23a и b) написать:

$$BC = 0,28(\tau - b_p) - \delta. \quad (V-23c)$$

Тогда выражение (V-21c) для радиуса r_1 с учетом равенств (V-21b и c) примет вид:

$$r_1 = R - 0,28(\tau - b_p) + \delta. \quad (V-23d)$$

Наконец, отрезок OD согласно рис. 99 может быть определен из соотношения

$$OD = \sqrt{OD_1^2 - DD_1^2}. \quad (V-24a)$$

Поскольку, кроме того,

$$OD_1 = OF = R_0, \quad DD_1 = \frac{1}{2} b_n,$$

то вместо (V-24a) можно также написать:

$$OD = \sqrt{R_0^2 - \frac{1}{4} b_n^2}. \quad (V-24b)$$

Поэтому равенство (V-21d) для радиуса r_0 согласно соотношениям (V-24b и 22c) примет вид:

$$r_0 = \sqrt{R_0^2 - \frac{1}{4} b_n^2} - \frac{1}{2} b_n \operatorname{ctg} \varphi. \quad (V-24c)$$

Радиус R_0 , как видно из рис. 99, зависит от угла скоса полюса β :

$$R_0 = \frac{D_p}{2} - h_0 = \frac{D_p}{2} - \frac{l_n}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (V-24d)$$

В связи с этим равенство (V-24c) можно написать еще в таком виде:

$$r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(D_p - l_n \operatorname{tg} \beta)^2 - b_n^2} - \frac{1}{2} b_n \operatorname{ctg} \varphi. \quad (V-24e)$$

Соотношения (V-22d, 23d и 24e) полностью определяют входящие в формулу (V-20) радиусы R , r_1 и r_0 . Этим соотношениям можно придать еще и другой вид, если заметить, что согласно (V-21a) имеет место равенство

$$\tau = \frac{\pi D_p}{2\varphi} = \varphi \cdot D_p. \quad (V-25a)$$

Вводя, кроме того, коэффициенты полюсного перекрытия

$$\alpha_p = \frac{b_p}{\tau} = \frac{b_p}{\varphi D_p}, \quad (V-25b)$$

$$\alpha_n = \frac{b_n}{\tau} = \frac{b_n}{\varphi D_p} \quad (V-25c)$$

и обозначая

$$\lambda_n = \frac{l_n}{D_p}, \quad (V-25d)$$

$$\Delta = \frac{\delta}{\tau}, \quad (V-25e)$$

вместо равенств (V-22d, 23d и 24e) можно написать:

$$R = \frac{D_p}{2} \left[\sqrt{1 - (\alpha_n \varphi)^2} - \alpha_n \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right], \quad (V-26a)$$

$$r_1 = \frac{D_p}{2} \left\{ \sqrt{1 - (\alpha_n \varphi)^2} - \left[\frac{\alpha_n}{\operatorname{tg} \varphi} + 0,56(1 - \alpha_p) - 2\Delta \right] \cdot \varphi \right\}, \quad (V-26b)$$

$$r_0 = \frac{D_p}{2} \left[\sqrt{(1 - \lambda_n \operatorname{tg} \beta)^2 - (\alpha_n \varphi)^2} - \alpha_n \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right]. \quad (V-26c)$$

Как видно из этих соотношений, радиусы R , r_1 и r_0 зависят от диаметра ротора D_p , угла φ , коэффициентов полюсного перекрытия α_n и α_p , относительной длины машины λ_n , угла скоса полюса β и относительной величины воздушного зазора Δ . Поскольку коэффициенты α_n и α_p практически мало изменяются, колеблясь в пределах 0,55—0,70, величина D_p является своего рода масштабным коэффициентом, а зазор Δ влияет слабо, то основными факторами, определяющими вид зависимостей (V-26a, b, c), являются φ и $\lambda_n \operatorname{tg} \beta$.

Из формул (V-21a и 26a, b, c) видно, что с ростом числа пар полюсов p угол φ уменьшается, а радиусы R , r_1 и r_0 возрастают. Поэтому поток тангенциального поля рассеяния $\Phi_{\sigma\tau}$ согласно формуле (V-20) должен по мере увеличения числа пар полюсов довольно быстро возрастать, ибо при этом возрастают как радиусы R , r_1 , r_0 , так и величина $\frac{1}{\varphi} = \frac{p}{\pi}$.

Еще быстрее с ростом числа полюсов будет возрастать относительная величина тангенциального потока

$$\tau_{\sigma\tau} = \frac{\Phi_{\sigma\tau}}{\Phi}, \quad (V-27a)$$

ибо полезный поток полюса Φ , равный

$$\Phi = B_\delta \alpha_\delta \tau l_i = \frac{\pi}{2} \alpha_\delta D l_i B_\delta \frac{1}{p}, \quad (V-27b)$$

оказывается обратно пропорциональным числу пар полюсов p .

Таким образом, при увеличении числа полюсов потоки тангенциального рассеяния весьма быстро возрастают как по абсолютной величине, так и в особенности по своему относительному значению.

Несколько иной характер носит зависимость величин $\Phi_{\sigma\tau}$ и $\tau_{\sigma\tau}$ от относительной длины машины λ_n и от угла скоса полюса β . Как видно из формул (V-26a, b, c), при увеличении λ_n или β уменьшается только радиус r_0 , а другие два радиуса R и r_1 не изменяются. Зависимость же величины $\Phi_{\sigma\tau}$ от r_0 , выражаемая формулой (V-20), имеет довольно сложный характер, и поэтому необходимо вычислить частную производную от $\Phi_{\sigma\tau}$ по r_0 :

$$\frac{\partial \Phi_{\sigma\tau}}{\partial r_0} = \frac{2\mu_0}{\varphi^2} \cdot \operatorname{ctg} \beta (F_{NS} + 2H_{nr}R) \left[-\ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{2H_{nr}(r_1 - r_0)}{F_{NS} + 2H_{nr}R} \right]. \quad (V-28)$$

Зависимость $\Phi_{\sigma\tau}$ от r_0 будет убывающей в том случае, если

$$\frac{\partial \Phi_{\sigma\tau}}{\partial r_0} < 0, \quad (V-28a)$$

т. е. согласно формуле (V-28), при условии

$$\frac{2H_{nr}(r_1 - r_0)}{F_{NS} + 2H_{nr}R} < \ln \frac{r_1}{r_0}. \quad (V-28b)$$

Решая это неравенство относительно H_{nr} , будем иметь:

$$2H_{nr} \left(r_1 - r_0 - R \ln \frac{r_1}{r_0} \right) < F_{NS} \ln \frac{r_1}{r_0}. \quad (V-28c)$$

Так как

$$R > r_1 > r_0; \quad \ln \frac{r_1}{r_0} > 0, \quad (V-28d)$$

то в левой части неравенства (V-28c) стоит отрицательная величина, а в правой — положительная. Следовательно, неравенство (V-28c) удовлетворяется при любых практически возможных значениях входящих в него величин, и зависимость $\Phi_{\sigma\tau}$ от r_0 имеет убывающий характер. Поэтому, например, при увеличении относительной длины машины λ_n , когда радиус r_0 уменьшается, величина тангенциального потока $\Phi_{\sigma\tau}$ будет несколько возрастать, но его относительное значение $\tau_{\sigma\tau}$ ввиду роста полезного потока (см. формулу (V-27b)) может даже несколько уменьшаться.

При увеличении угла скоса полюса β радиус r_0 тоже уменьшается, а величина в квадратных скобках в выражении (V-20) — увеличивается. Однако поскольку перед этой скобкой имеется еще убывающая величина $\operatorname{ctg} \beta$, то характер зависимости величины потока $\Phi_{\sigma\tau}$ от угла β может быть различным. Так, при малых углах β , когда влияние величины $\operatorname{tg} \beta$ в

формуле (V-26с) невелико, а $\operatorname{ctg} \beta$, наоборот, изменяется очень быстро, зависимость $\Phi_{\sigma\tau}$ от β будет определяться, в основном, функцией $\operatorname{ctg} \beta$, т. е. будет убывающей. При значительных углах β и при достаточно больших значениях λ_n влияние $\operatorname{tg} \beta$ в формуле (V-26с) может стать решающим, и тогда зависимость $\Phi_{\sigma\tau}$ от β будет иметь возрастающий характер.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОРЦОВОГО ПОЛЯ МЕЖДУПОЛЮСНОГО РАССЕЯНИЯ

Область торцового поля рассеяния, представленная на рис. 91, характеризуется наличием наружных (H_1 и H_2) и внутренних (D_1 и D_2) углов, около которых поле имеет резко выраженный неравномерный характер. В углах H_1 и H_2 имеет место концентрация силовых линий, а в углах D_1 и D_2 , наоборот, значительное ослабление поля. Поскольку область, изображенная на рис. 91, является довольно сложной для аналитического исследования, можно, воспользовавшись незначительностью влияния внутренних углов D_1 и D_2 , исключить их из рассмотрения путем проведения силовых линий D_1N_1 и D_2N_2 и разделения тем самым поля на рис. 91 на три области.

Средняя из этих областей представляет собой криволинейную трапецию $D_1N_1N_2D_2$, основания которой несут потенциалы U и $-U$, а боковые стороны являются силовыми линиями. Торцовый поток $\Phi_{\sigma\tau}$ между основаниями трапеции $D_1N_1N_2D_2$ с достаточной для практики точностью можно вычислить, предполагая, что напряженность магнитного поля $H_{\sigma\tau}$ возрастает на пути от нижнего основания к верхнему по закону прямой линии

$$H_{\sigma\tau} = H_0 + \frac{H_m - H_0}{e} \cdot x, \quad (\text{V-29a})$$

где H_0 и H_m — напряженность поля на нижнем и верхнем основаниях трапеции, а e — высота этой трапеции. Так как поток вектора $\vec{H}$ на верхнем и нижнем основаниях должен быть одинаков, то между величинами H_0 и H_m должно иметь место соотношение

$$H_0 b_0 = H_m b_1, \quad (\text{V-29b})$$

где через b_0 и b_1 обозначены длины нижнего и верхнего оснований (рис. 91).

М. д. с. между основаниями трапеций с учетом соотношения (V-29a) будет равна

$$F_T = \int_0^e H_{\sigma\tau} dx = \frac{H_m + H_0}{2} \cdot e. \quad (\text{V-29c})$$

Решая уравнения (V-29b и c) относительно H_0 и H_m , найдем:

$$H_0 = \frac{F_T}{e} \cdot \frac{2b_1}{b_0 + b_1}; \quad H_m = \frac{F_T}{e} \cdot \frac{2b_0}{b_0 + b_1}. \quad (\text{V-29d})$$

Пользуясь этими равенствами, нетрудно вычислить и поток $\Delta\Phi_{\sigma\tau}$, имеющий место в слое толщиной d , заключенном между двумя соседними коническими сечениями междуполусного пространства (см. рис. 86):

$$\Delta\Phi_{\sigma\tau} = \mu_0 H_m b_1 d = \mu_0 \frac{F_T}{e} \cdot \frac{2b_0 b_1}{b_0 + b_1} d. \quad (\text{V-30a})$$

Суммируя затем все частичные потоки $\Delta\Phi_{\sigma\tau}$, проходящие вдоль скошенной (торцовой) поверхности полюса BC , можно найти полную величину потока торцового рассеяния между контеобразными полюсами:

$$\Phi_{\sigma\tau} = \sum \Delta\Phi_{\sigma\tau} = \mu_0 \sum \frac{F_T}{e} \cdot \frac{2b_0 b_1}{b_0 + b_1} d. \quad (\text{V-30})$$

Таким образом, средняя область $D_1N_1N_2D_2$, выделенная на рис. 91, сравнительно легко поддается расчету. Несколько неопределенным оказывается только размер $N_2N_1 = b_1$, который приходится выбирать интуитивно — на основании приближенного построения силовых линий D_1N_1 и D_2N_2 . В некоторых случаях, когда размер H_1H_2 оказывается больше расстояния e , величина b_1 получается лишь незначительно меньше отрезка H_1H_2 , и приближенно их можно полагать равными:

$$b_1 \approx H_1H_2. \quad (\text{V-30b})$$

При этом неопределенности в выборе размера b_1 уже нет.

Переходя к исследованию двух остальных областей, изображенных на рис. 91 — $K_1L_1H_1N_1D_1$ и $K_2L_2H_2N_2D_2$, следует прежде всего заметить, что эти области совершенно одинаковы и в дальнейшем достаточно рассмотреть одну из них, например $K_1L_1H_1N_1D_1$. Эта область характерна тем, что поле в ней образуется между угловой поверхностью $L_1H_1N_1$ и плоскостью K_1D_1 . Для приближенного определения этого поля можно предположить, что плоскость L_1H_1 располагается параллельно, а H_1N_1 — перпендикулярно к плоскости K_1D_1 . Кроме того, можно допустить, что силовая линия N_1D_1 при этом также стала параллельной плоскости K_1D_1 , а точка D_1 удалась в бесконечность. Тогда окажется возможным заменить исследование поля в области $K_1L_1H_1N_1D_1$ изучением более простой области $OA_1A_2A_3O$, представленной на рис. 100. Поскольку одна из граничных поверхностей этой области — A_3O — является силовой, а не эквипотенциальной, то для упрощения задачи целесообразно дополнить рассматриваемую область

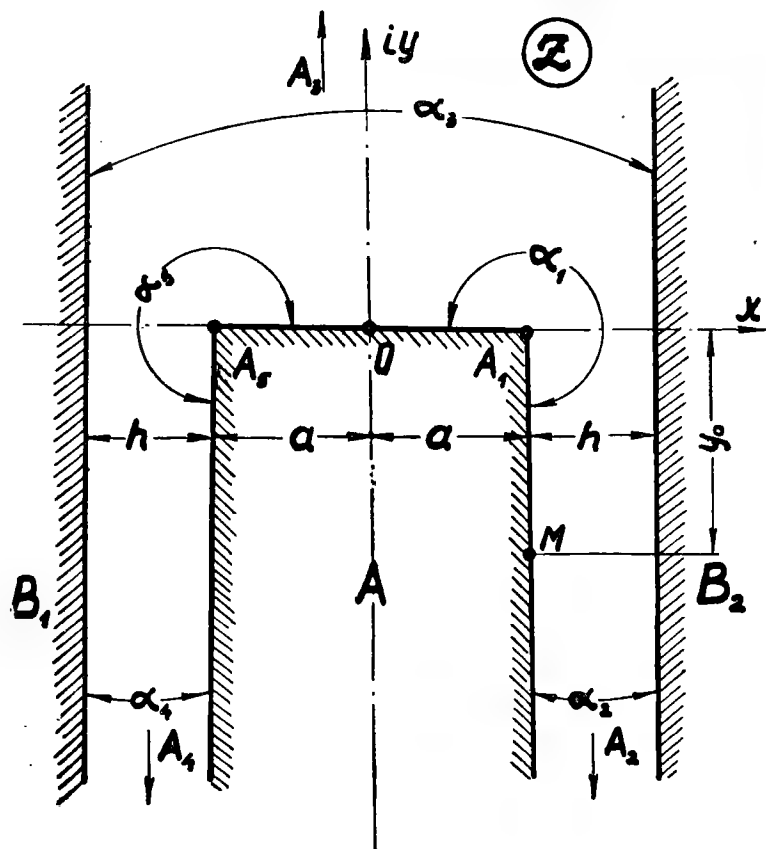


Рис. 100. К окончательной формулировке задачи расчета поля между углом и плоскостью.

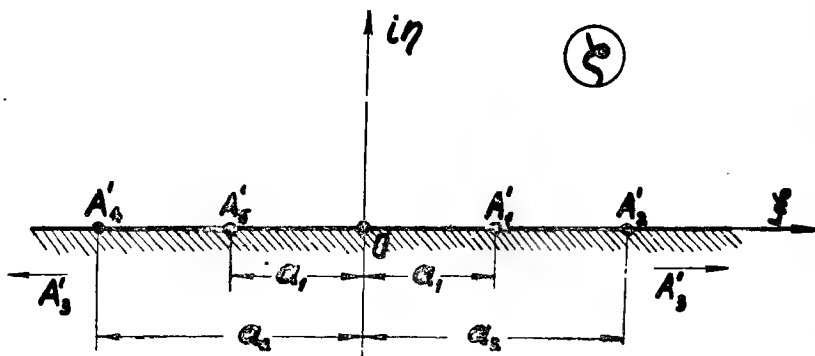


Рис. 101. Преобразование области на рис. 100 в верхнюю полуплоскость.

область $OA_1A_2A_3O$ симметрично расположенной областью $OA_3A_4A_5O$ и получить в результате более удобную для исследования область $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$, образованную торцевой частью некоторого параллелепипеда A шириною $2a$ и двумя плоскостями B_1 и B_2 , расположенными параллельно боковым граням параллелепипеда на расстояниях h от них (рис. 100). Потенциал обеих плоскостей B_1 и B_2 одинаков и равен U , а потенциал параллелепипеда может быть принят равным нулю.

Такая задача сравнительно легко может быть решена методом конформного преобразования исследуемой области z (рис. 100) на верхнюю полуплоскость ζ (рис. 101) при помощи интеграла Кристоффеля—Шварца.

Исследование поля торца параллелепипеда, находящегося между двумя параллельными плоскостями

Преобразуемая область представляет собой пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Углы при вершинах этого пятиугольника соответственно равны: $\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = \frac{3\pi}{2}$. Поэтому общее выражение для интеграла Кристоффеля—Шварца в рассматриваемом случае будет иметь вид:

$$z = C \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a_1)^{-1/2} (\zeta - a_2)^{-1} (\zeta - a_3)^{-1} (\zeta - a_4)^{-1} \times \\ \times (\zeta - a_5)^{1/2} d\zeta + C_1 = C \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{V(\zeta - a_1)(\zeta - a_5)}{(\zeta - a_2)(\zeta - a_3)(\zeta - a_4)} d\zeta + C_1, \quad (V-31)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — координаты точек $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$, являющихся отображениями на плоскость вершин пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$,

C, C_1, ζ_0 — произвольные постоянные.

В целях упрощения выражения (V-31) целесообразно расположить начало координат O на плоскости z в центре торца параллелепипеда (рис. 100) и привести ему в соответствие начало координат O' на плоскости ζ (рис. 101):

$$\text{при } z = 0 \dots \zeta = 0. \quad (V-31a)$$

Тогда, подставив эти значения в выражение (V-31), будем иметь:

$$0 = C \int_{\xi_0}^0 \frac{V(\xi - a_1)(\xi - a_5)}{(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)} d\xi + C_1, \quad (V-31b)$$

откуда, определяя величину C_1 и подставляя полученное выражение обратно в формулу (V-31), после небольших преобразований получим:

$$z = C \int_0^{\xi} \frac{V(\xi - a_1)(\xi - a_5)}{(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)} d\xi. \quad (V-32)$$

Далее целесообразно точку A_3' расположить в бесконечности (рис. 101), с тем чтобы ось η , как и ось y , была бы осью симметрии. При этом множитель $(\xi - a_3)$ в формулах (V-31, 31b, 32) становится, как известно, равным единице.

Наконец, исходя из соображений симметрии можно расположить точки A_5' и A_4' симметрично точкам A_1' и A_2' , так что

$$a_5 = -a_1; \quad a_4 = -a_2. \quad (V-32a)$$

На основании изложенного выражение (V-32) примет вид:

$$z = C \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{\xi^2 - a_1^2}}{\xi^2 - a_2^2} d\xi. \quad (V-33)$$

Интеграл в правой части этого равенства оказывается возможным выразить в элементарных функциях. В результате интегрирования после подстановки пределов получается следующее выражение:

$$z = C \left[\ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a_1^2}}{ia_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{(\sqrt{a_2^2 - a_1^2} \cdot \sqrt{\xi^2 - a_1^2} - a_1 - a_2\xi)(\xi - a_2)}{(\sqrt{a_2^2 - a_1^2} \cdot \sqrt{\xi^2 - a_1^2} - a_1 + a_2\xi)(\xi + a_2)} \right]. \quad (V-34)$$

Для определения неизвестных постоянных C , a_1 , a_2 удобно воспользоваться особенностями функции $z(\xi)$ в точках A_2 , A_4 и A_3 . Эти точки характерны тем, что при переходе через них функция $z(\xi)$ испытывает скачки. Например, если конец вектора z перемещается вниз от точки A_1 к точке A_2 , скользя при этом по линии A_1A_2 , то вещественная часть величины z будет

постоянна и равна a . Поэтому для величины z можно в этом случае написать:

$$z' = a + iy. \quad (V-35a)$$

При повороте конца вектора z из точки A_2 по линии A_1A_2 вещественная часть будет равна $(a + h)$, и тогда

$$z'' = (a + h) + iy. \quad (V-35b)$$

Сравнивая выражения (V-35a и 35b), нетрудно прийти к выводу, что при обходе контура $A_1A_2A_3$ функция $z(\xi)$ при переходе через точку A_2 испытывает скачок Δz , равный

$$\Delta z_2 = z'' - z' = h. \quad (V-35c)$$

Аналогичным образом можно заметить, что в точках A_3 и A_4 функции $z(\xi)$ испытывает соответственно скачки:

$$\text{в точке } A_3 \quad \Delta z_3 = -2(a + h), \quad (V-35d)$$

$$\text{в точке } A_4 \quad \Delta z_4 = h. \quad (V-35e)$$

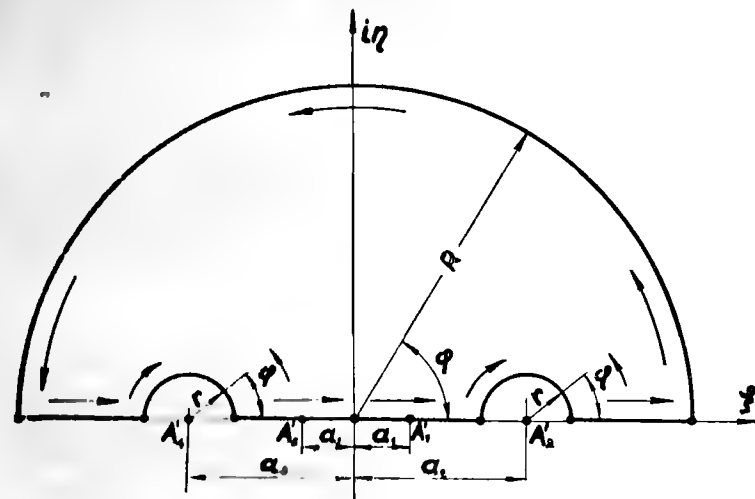


Рис. 102. Контур интегрирования на плоскости ξ .

Переходя далее к рассмотрению соответствующих точек A_2' , A_3' , A_4' на плоскости ξ , следует заметить, что поскольку в этих точках функция $z(\xi)$ принимает бесконечные значения, то точки A_2' , A_3' и A_4' являются особыми и при обходе контура на плоскости ξ их следует обойти по бесконечно малым (для точек A_2' и A_4') и бесконечно большим (для точки A_3') окружностям. В результате контур обхода верхней полуплоскости ξ примет вид, показанный на рис. 102.

При перемещениях конца вектора по полуокружностям вокруг точек A_2' и A_4' величину ξ можно, как известно, выразить через координаты этих точек, радиус полуокружностей r и угол φ между радиусом и осью вещественных ξ . Так, при обходе точки A_2' величина ξ будет равна:

$$\xi_{(2)} = a_2 + re^{i\varphi}, \quad (V-36a)$$

а при обходе точки A_4'

$$\xi_{(4)} = -a_2 + re^{i\varphi}, \quad (V-36b)$$

причем величины a_2 и r остаются постоянными, а угол φ изменяется от π (в начальных точках путей по полуокружностям) до нуля (в конечных точках).

При перемещениях конца вектора $\bar{\xi}$ по полуокружности бесконечно большого радиуса R (рис. 102) величину ξ можно выразить через этот радиус и угол φ , образуемый радиусом с осью вещественных:

$$\xi_{(3)} = Re^{i\varphi}, \quad (V-36c)$$

причем угол φ в процессе обхода изменяется от нуля до π .

Для определения приращений Δz функции $z(\xi)$ с целью подстановки этих приращений в равенства (V-35c, d, e) необходимо сравнить значения функции $z(\xi)$ в конце и в начале путей по полуокружностям. Используя для этой цели выражение (V-33), будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta z = z(\xi_k) - z(\xi_n) &= C \int_0^{\xi_k} \frac{\sqrt{\xi^2 - a_1^2}}{\xi^2 - a_2^2} d\xi - C \int_0^{\xi_n} \frac{\sqrt{\xi^2 - a_1^2}}{\xi^2 - a_2^2} d\xi = \\ &= C \int_{\xi_n}^{\xi_k} \frac{\sqrt{\xi^2 - a_1^2}}{\xi^2 - a_2^2} d\xi, \end{aligned} \quad (V-37)$$

где через ξ_n и ξ_k обозначены значения независимой переменной ξ в начале и в конце пути по соответствующей полуокружности.

Как видно из выражения (V-37), приращение Δz оказывается равным интегралу по полуокружности от ее начальной до конечной точек. Поскольку на полуокружности для величины ξ справедливо одно из выражений (V-36a, b, c), где переменной величиной является только угол φ , то под интегралом (V-37) можно вместо ξ ввести новую переменную φ . Тогда, поскольку значениям ξ_n и ξ_k соответствуют углы 0 или π , то пределы интегрирования в выражении (V-37) станут вполне определенными.

Применяя изложенные соображения, например, к точке A_2' , будем согласно равенствам (V-36a и 37) иметь:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_2 + re^{i\varphi}; \quad d\xi = ire^{i\varphi} d\varphi \\ \xi_n \dots \varphi_n &= \pi; \quad \xi_k \dots \varphi_k = 0 \\ \Delta z_2 &= C \int_{\pi}^0 \frac{\sqrt{(a_2 + re^{i\varphi})^2 - a_1^2}}{(a_2 + re^{i\varphi})^2 - a_2^2} \cdot ire^{i\varphi} d\varphi = \\ &= iC \int_{\pi}^0 \frac{\sqrt{(a_2^2 - a_1^2) + 2a_2re^{i\varphi} + (re^{i\varphi})^2}}{2a_2 + re^{i\varphi}} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (V-37a)$$

Переходя в этом выражении к пределу при $r \rightarrow 0$, найдем:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta z_2 = iC \int_{\pi}^0 \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} d\varphi = -i\pi \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} \cdot C. \quad (V-37b)$$

Эта величина должна быть, очевидно, равна тому скачку, который испытывает функция $z(\xi)$ в точке A_2 и который, согласно равенству (V-35c), равен h . Приравнявая поэтому правые части равенств (V-35c и 37b), получим следующее соотношение:

$$C \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} = \frac{ih}{\pi}, \quad (V-37c)$$

являющееся одним из уравнений, необходимых для определения неизвестных постоянных a_1 , a_2 и C . Повторяя изложенный вывод для точки A_4 , будем иметь:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta z_4 = i\pi \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} \cdot C, \quad (V-37d)$$

$$C \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{2a_2} = -\frac{ih}{\pi}. \quad (V-37e)$$

Одновременное удовлетворение равенств (V-37c и 37e) возможно, очевидно, только в том случае, когда справедливо соотношение

$$C^2(1 - a^2) = -\left(\frac{2h}{\pi}\right)^2, \quad (V-38)$$

полученное путем возведения в квадрат равенства (V-37c или e) и введения обозначения

$$a = \frac{a_1}{a_2}. \quad (V-38a)$$

Таким образом, рассмотрение особенностей функции $z(\zeta)$ в точках A_2 и A_4 привело к одному и тому же условию (V-38). Причиной этого является, очевидно, симметричное расположение точек A_2 и A_4 .

Переходя теперь к рассмотрению особенностей функции в точке A_3 , аналогично уравнениям (V-37a, b) будем иметь:

$$\zeta = Re^{i\varphi}; \quad d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi;$$

$$\zeta_n \dots \varphi_n = 0; \quad \zeta_k \dots \varphi_k = \pi,$$

$$\Delta z_3 = C \int_0^\pi \frac{\sqrt{R^2 e^{i2\varphi} - a_1^2}}{R^2 e^{i2\varphi} - a_2^2} iRe^{i\varphi} d\varphi, \quad (V-39a)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta z_3 = iC \int_0^\pi d\varphi = i\pi C. \quad (V-39b)$$

Учитывая также соотношение (V-35d), нетрудно получить выражение для постоянной C :

$$C = \frac{2}{\pi} (a + h)i. \quad (V-40)$$

Подставляя это соотношение в равенство (V-38), найдем также и выражение для α :

$$\alpha^2 = \frac{a(a + 2h)}{(a + h)^2}. \quad (V-41)$$

Как видно из выражений (V-41 и 38), в результате проведенного анализа удалось определить только отношение величин a_1 и a_2 , в то время как каждая из них в отдельности осталась неизвестной. Однако из выражения (V-34) нетрудно заметить, что в определении a_1 и a_2 необходимости не будет, если вместо ζ ввести новую переменную t , равную

$$t = \frac{\zeta}{a_2}. \quad (V-42a)$$

Тогда, пользуясь равенствами (V-38a и 42a), можно привести выражение (V-34) к виду:

$$z = C \left[\ln \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{ia} + \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{t - 1}{t + 1} \cdot \frac{t + a^2 - \sqrt{(1 - a^2)(t^2 - a^2)}}{t - a^2 + \sqrt{(1 - a^2)(t^2 - a^2)}} \right], \quad (V-42)$$

в котором неизвестные параметры уже отсутствуют.

Уравнение (V-42) дает таким образом полное решение за-

дачи. Однако оно еще непригодно для практического применения, так как преобразованное поле на верхней полуплоскости ζ не имеет простого характера и само нуждается в исследовании. Для этого целесообразно преобразовать поле ζ (или t) к наиболее простому однородному полю полосы w между двумя параллельными плоскостями, одна из которых имеет потенциал 0, а другая U (рис. 103).

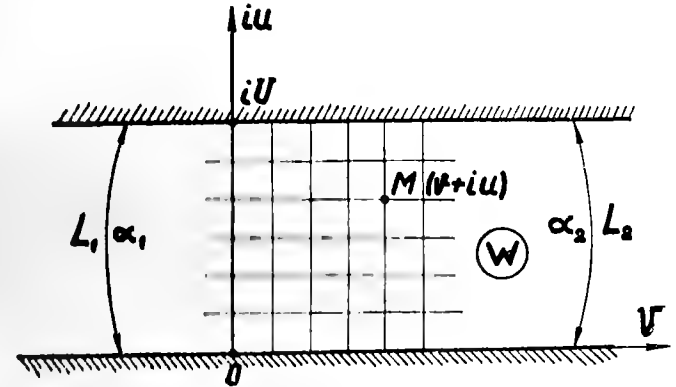


Рис. 103. Поле комплексного потенциала для области на рис. 100.

Для определения связи между полями ζ и w можно вновь воспользоваться интегралом Кристоффеля—Шварца, применив его для отображения двуугольника w на верхнюю полуплоскость ζ . Оба угла α_1 и α_2 при вершинах L_1 и L_2 этого двуугольника равны нулю (рис. 103), поэтому интеграл Кристоффеля—Шварца в этом случае будет иметь вид:

$$w = D \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - l_1)^{-1} (\zeta - l_2)^{-1} d\zeta + D_1. \quad (V-43)$$

Выбирая начало координат на плоскости w таким образом, чтобы точке $w = 0$ соответствовала бы точка $\zeta = 0$, и проводя преобразования, аналогичные (V-31a, b и 32), можно привести равенство (V-43) к виду:

$$w = D \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - l_1)(\zeta - l_2)}. \quad (V-43a)$$

В точках L_1 и L_2 двуугольника w происходит скачок потенциала от 0 до U или обратно. Такие же скачки будут иметь

место и в соответствующих точках L_1' и L_2' на полуплоскости ζ . С другой стороны, на плоскости z изменение потенциала от 0 до U или обратно происходит в точках A_2 и A_4 , и, следовательно, на полуплоскости ζ такими же свойствами обладают точки A_2' и A_4' . Поэтому для того чтобы поле двуугольника w было конформным преобразованием области z , очевидно необходимо, чтобы точки A_2' и L_2' и точки A_4' и L_1' соответственно совпадали. Отсюда следует:

$$l_1 = -a_2, \quad l_2 = +a_2, \quad (V-43b)$$

и равенство (V-43a) получает вид:

$$w = D \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2 - a_2^2}. \quad (V-43c)$$

После интегрирования получим:

$$w = \frac{D}{2a_2} \ln \frac{a_2 - \zeta}{a_2 + \zeta}. \quad (V-44)$$

Для определения постоянной D можно воспользоваться свойствами функции $w(\zeta)$ в точке L_2 или L_1 , где имеет место скачок iU или $-iU$. Вычисляя аналогично (V-37a, b) предел приращения функции $w(\zeta)$ при обходе вокруг точек A_2' и A_4' и приравнивая эти приращения соответствующим скачкам на плоскости w , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \Delta w_2 &= -i\pi \frac{D}{2a_2} = iU \\ \lim_{r \rightarrow 0} \Delta w_4 &= +i\pi \frac{D}{2a_2} = -iU \end{aligned} \right\}, \quad (V-44a)$$

откуда

$$D = -\frac{2a_2 U}{\pi}. \quad (V-44b)$$

Используя равенства (V-44b и 42a), можно привести равенство (V-44) к следующему окончательному виду:

$$w = \frac{U}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t}. \quad (V-45)$$

Из этого равенства нетрудно получить и выражение для t :

$$t = \frac{e^{\frac{\pi w}{U}} - 1}{e^{\frac{\pi w}{U}} + 1} = \operatorname{th} \left(\frac{\pi w}{2U} \right). \quad (V-46)$$

Равенства (V-46 и 42) дают полное решение поставленной задачи. Задаваясь тем или иным значением комплексного потенциала $w = v + iu$ и подставляя это значение в формулу (V-46), а затем найденную величину t — в формулу (V-42), можно найти комплексную координату точки $z = x + iy$, в которой имеет место заданное значение комплексного потенциала.

При этом, как известно, мнимая часть комплексного потенциала определяет величину скалярного магнитного потенциала рассматриваемой точки, а вещественная часть дает величину потока вектора $\vec{H}$ на участке между рассматриваемой точкой и силовой линией, изображающейся на плоскости w осью ординат $v = 0$. Для рис. 100 такой линией, как нетрудно установить из соответствия точек на рис. 100—102, является ось $y = 0$ (линия OA_3), и поэтому вещественная часть v комплексного потенциала $w = v + iu$ представляет собой поток вектора $\vec{H}$ между линией OA_3 и рассматриваемой точкой.

Определение потока между углом и плоскостью

Согласно поставленной выше задаче необходимо найти поток рассеяния $\Phi_{сн}$, имеющий место на участке $N_1 H_1 L_1$ угловой поверхности (см. рис. 91). При замене этой задачи исследованием несколько более простого поля для области, представленной на рис. 100, точке H_1 была приведена в соответствие точка A_1 , точке N_1 — точка O , а точке L_1 — некоторая точка M на линии $A_1 A_2$ (см. рис. 100).

Таким образом, контур $N_1 H_1 L_1$ оказался замененным контуром $OA_1 M$, и для определения потока вдоль контура $N_1 H_1 L_1$ достаточно определить его на контуре $OA_1 M$. Поскольку при этом начальная точка O этого контура лежит на линии OA_3 , для которой, как указывалось выше, функция потока v равна нулю, то искомая величина потока $\Delta \Phi_{сн}$ вдоль линии $OA_1 M$ должна быть равна величине функции потока в точке M , умноженной на магнитную проницаемость воздуха μ_0 и на толщину слоя поля d , взятую в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа на рис. 100:

$$\Delta \Phi_{сн} = \mu_0 v_M d. \quad (V-47a)$$

При определении величины функции потока v_M в точке M следует заметить, что поскольку точка M находится на линии $A_1 A_2$, то соответствующая ей точка M' на плоскости ζ должна находиться между A_1' и A_2' , т. е. ее координаты ζ_0 и t_0 согласно рис. 101 и формулам (V-42a и 38a) должны удовлетворять неравенствам

$$a_1 < \zeta_0 < a_2; \quad a < t_0 < 1. \quad (V-47b)$$

Подставляя значение t_0 в формулу (V-45), найдем выражение для комплексного потенциала w_M в точке M :

$$w_M = \frac{U}{\pi} \ln \frac{1+t_0}{1-t_0}, \quad (V-47c)$$

и поскольку согласно неравенству (V-47b) дробь под знаком логарифма в выражении (V-47c) будет положительной и по величине больше единицы, то сам логарифм, а следовательно, и комплексный потенциал w_M при этом будут вещественными положительными величинами. Это означает, что в точке M мнимая часть u комплексного потенциала w_M равна нулю (как это и должно быть согласно рис. 100), и поэтому выражение (V-47c) представляет одновременно и величину функции потока v_M . Таким образом, согласно (V-47a и c) можно написать:

$$\Delta\Phi_{сн} = \mu_0 \cdot d \cdot \frac{U}{\pi} \cdot \ln \frac{1+t_0}{1-t_0}, \quad (V-48)$$

Параметр t_0 связан с комплексной координатой z_0 точки M соотношением (V-42). Имея в виду неравенства (V-47b) и выделяя действительную и мнимую части в равенстве (V-42) с учетом соотношений (V-40 и 41), для координаты z_0 можно получить следующее выражение:

$$z_0 = a - i \left\{ \frac{h}{\pi} \cdot \ln \left[\frac{1+t_0}{1-t_0} \cdot \frac{t_0 - \alpha^2 + \sqrt{(1-\alpha^2)(t_0^2 - \alpha^2)}}{t_0 + \alpha^2 - \sqrt{(1-\alpha^2)(t_0^2 - \alpha^2)}} \right] - \frac{2(a+h)}{\pi} \ln \frac{t_0 + \sqrt{t_0^2 - \alpha^2}}{\alpha} \right\}, \quad (V-49)$$

причем выражение в фигурных скобках при выполнении неравенства (V-47b) представляет собой вещественную положительную величину.

Представляет интерес сравнить величину потока $\Delta\Phi_{сн}$ вдоль контура OA_1M с тем потоком $\Delta\Phi_{св}$, который имел бы место между плоскостями A_1M и A_2A_3 в случае однородного поля, т. е. при пренебрежении краевым эффектом. Для этого случая можно было бы, очевидно, написать:

$$\Delta\Phi_{св} = \mu_0 \cdot d \cdot \frac{U}{h} \cdot y_0, \quad (V-50)$$

где y_0 — длина отрезка A_1M , определяемая через параметр t_0 выражением в фигурных скобках равенства (V-49). Учитывая это обстоятельство и вычитая равенство (V-50) из (V-48), после несложных преобразований получим:

$$\Delta\Phi'_{cy} = \Delta\Phi_{сн} - \Delta\Phi_{св} = \mu_0 d \frac{U}{\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \ln \frac{t_0 + \sqrt{t_0^2 - \alpha^2}}{\alpha} - \ln \frac{t_0 - \alpha^2 + \sqrt{(1-\alpha^2)(t_0^2 - \alpha^2)}}{t_0 + \alpha^2 - \sqrt{(1-\alpha^2)(t_0^2 - \alpha^2)}} \right]. \quad (V-51a)$$

Это выражение определяет собой тот дополнительный поток, который появляется в результате действия краевого эффекта и наличия торца параллелепипеда. Для определения этого дополнительного потока применительно ко всей поверхности OA_1A_2 необходимо точку M удалить в бесконечность, приблизив ее к точке A_2 . При этом согласно рис. 101 и формуле (V-42a) будем иметь:

$$\text{при } M' \rightarrow A_2' \dots \dots \zeta_0 \rightarrow a_2, t_0 \rightarrow 1.$$

Переходя, следовательно, в выражении (V-51a) к пределу при $t_0 \rightarrow 1$ будем иметь:

$$\Delta\Phi_{cy} = \lim_{t_0 \rightarrow 1} \Delta\Phi'_{cy} = \mu_0 d \frac{U}{\pi} \times \left[\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} - \ln \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \right]. \quad (V-51)$$

Для практических целей удобно ввести в рассмотрение коэффициент магнитной проводимости λ_{cy} , представляющий собой отношение потока $\Delta\Phi_{cy}$ к $\mu_0 \cdot d \cdot U$ и численно равный величине того потока, который имел бы место в слое, толщиной в единицу длины, когда магнитная проницаемость вещества между плоскостями и разность потенциалов между ними равны единице. В соответствии с формулой (V-51) для коэффициента магнитной проводимости λ_{cy} можно написать:

$$\lambda_{cy} = \frac{\Delta\Phi_{cy}}{\mu_0 \cdot d \cdot U} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} - \ln \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \right]. \quad (V-52)$$

Как видно из этого выражения, коэффициент магнитной проводимости потока углового рассеяния зависит только от параметра α , который, в свою очередь, согласно формуле (V-41), зависит от параметра η , равного отношению расстояния h между углом торца и плоскостью к толщине a самого торца:

$$\alpha^2 = \frac{1+2\eta}{(1+\eta)^2}, \quad (V-53)$$

причем

$$\eta = \frac{h}{a}. \quad (V-53a)$$

Подставляя соотношение (V-53) в формулу (V-52), нетрудно получить выражение для коэффициента магнитной проводимости углового рассеяния λ_{cy} в функции отношения $\eta = \frac{h}{a}$:

$$\lambda_{cy} = -\frac{1}{\pi} \left[2 \ln \frac{1+2\eta}{\eta} + \frac{1}{\eta} \ln(1+2\eta) \right]. \quad (V-54)$$

Соответствующая этой формуле зависимость приведена на рис. 104, откуда видно, что по мере удаления плоскостей от торца параллелепипеда, т. е. по мере роста отношения η величина λ_{cy} быстро уменьшается, стремясь к определенному пределу, равному

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \lambda_{cy} = \frac{2 \ln 2}{\pi} = 0,442. \quad (V-54a)$$

В конструкциях роторов с когтеобразными полюсами отношение η обычно имеет порядок от 0,1 до 1. В этих случаях согласно кривой рис. 104 величина коэффициента магнитной проводимости углового рассеяния колеблется сравнительно немного — примерно от 2 до 1.

С помощью кривой, изображенной на рис. 104, можно сравнительно просто определить величину потока углового рассеяния когтеобразного полюса. Для этой цели необходимо построить несколько конических сечений междуполюсного пространства подобно тому, как это показано на рис. 86, и для каждого из этих сечений определить величины a , h и $\eta = \frac{h}{a}$. При этом в качестве величины h следует брать минимальное для данного сечения расстояние между полюсами противоположной полярности (например, по линии P_1H_1 на рис. 91), а в качестве величины a — отрезок H_1N_1 , выделенный при разделении поля рис. 91 на три отдельных области. Поскольку положение точки N_1 оказывается довольно неопределенным, ибо его приходится находить интуитивным путем, то в ряде случаев, особенно, когда размер H_1H_2 не очень велик, можно в качестве величины a брать просто половину ширины полюса в этом месте H_1H_2 . В этом случае величина η будет несколько преуменьшена, однако коэффициент λ_{cy} согласно рис. 104 изменится сравнительно немного.

Определив таким образом для каждого из сечений значения отношения η и с помощью формулы (V-54) или кривой рис. 104 — соответствующие значения коэффициента λ_{cy} , можно определить и те величины потоков рассеяния $\Delta\Phi_{cy}$, которые относятся к промежутку между двумя соседними сече-

ниями. Для этого согласно формуле (V-52) следует коэффициент λ_{cy} умножить на магнитную проницаемость воздуха μ_0 , расстояние между сечениями d и разность магнитных потенциалов между полюсами U :

$$\Delta\Phi_{cy} = \mu_0 U \lambda_{cy} d. \quad (V-55a)$$

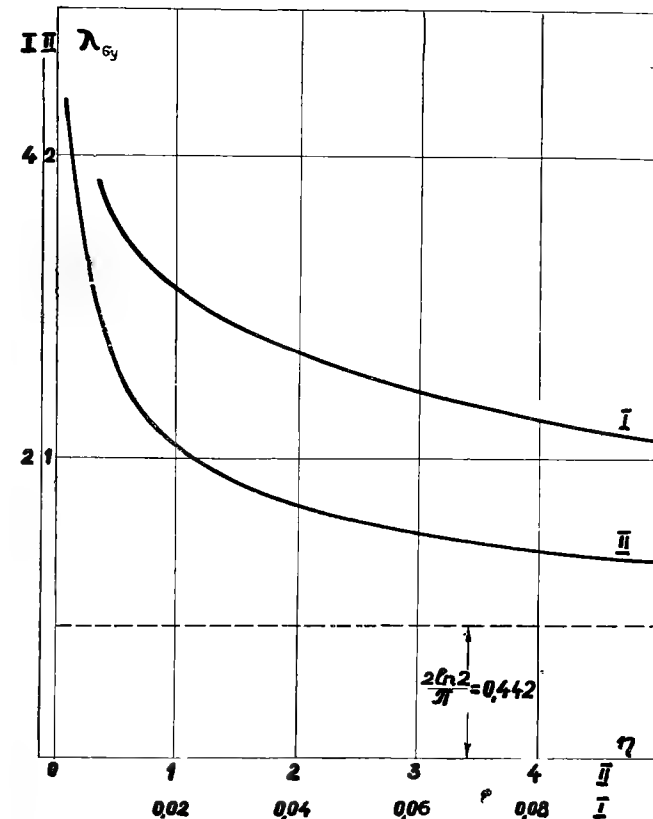


Рис. 104. Зависимость коэффициента магнитной проводимости торцового потока рассеяния λ_{cy} от параметра η .

Затем, суммируя все частичные потоки $\Delta\Phi_{cy}$, имеющие место вдоль скошенной поверхности полюса BC (см. рис. 86), нетрудно найти полную величину потока углового рассеяния когтеобразного полюса:

$$\Phi_{cy} = \sum \Delta\Phi_{cy} = \mu_0 \sum (U \lambda_{cy} d). \quad (V-55)$$

Для окончательного решения задачи, помимо потока Φ_{cy} , следовало бы еще определить поток Φ_{co} , соответствующий

однородному полю на участке L_1H_1 (см. рис. 91). Однако в этом практически нет необходимости, ибо поток Φ_{co} оказался учтенным ранее, при расчете потока тангенциального рассеяния Φ_{ct} , ибо при интегрировании выражения (V-19a) в пределах от r_0 до r_1 была охвачена не только область $M_1M_2L_1K_1$, но и область $K_1L_1H_1P_1$, причем предполагалось, что в точке H_1 угол отсутствует, а плоскость $M_2L_1H_1$ продолжается до встречи с плоскостью $M_1K_1P_1$ (см. рис. 90).

Таким образом, поток Φ_{co} практически входит в тангенциальный поток Φ_{ct} , вычисляемый по формуле (V-20), и для полного учета явления рассеяния достаточно добавить лишь поток углового рассеяния Φ_{cy} (V-55) и поток торцового рассеяния Φ_{ct} (V-30).

4. ПОТОКИ РАССЕЯНИЯ КОГТЕОБРАЗНОГО ПОЛЮСА

В целях более наглядного представления явления рассеяния между когтеобразными полюсами в главе II были введены понятия о потоках рассеяния Φ_{cb} , Φ_{cc} и Φ_{cm} , исходящих из определенных поверхностей полюсной системы. Теперь, после достаточно подробного исследования междуполюсного рассеяния, можно получить для этих потоков более конкретные выражения.

1. Поток рассеяния через боковую поверхность полюса Φ_{cb} состоит, как нетрудно заметить, из тангенциального потока Φ_{ct} и из углового потока Φ_{cy} , исходящего из полюса противоположной полярности и входящего в рассматриваемую боковую поверхность полюса на участке K_1D_1 (см. рис. 91):

$$\Phi_{cb} = \Phi_{ct} + \Phi_{cy}. \quad (V-56a)$$

2. Поток рассеяния через внутреннюю скошенную поверхность полюса Φ_{cc} складывается из торцового потока Φ_{ct} и двух угловых потоков Φ_{cy} , соответствующих двум ребрам H_1 и H_2 внутренней скошенной поверхности (см. рис. 91):

$$\Phi_{cc} = \Phi_{ct} + 2\Phi_{cy}. \quad (V-56b)$$

3. Поток рассеяния через промежуток между двумя соседними полюсами одной полярности Φ_{cm} согласно рис. 91 равен торцовому потоку Φ_{ct} :

$$\Phi_{cm} = \Phi_{ct}. \quad (V-56c)$$

В соответствии с равенствами (V-56a, b, c) можно переписать выражения (II-1 и 2) в следующем виде:

для потока в основании полюса

$$\Phi_n = \Phi + 2\Phi_{ct} + 4\Phi_{cy} + \Phi_{ct}, \quad (V-57a)$$

для потока в сборном кольце

$$\Phi_k = p(\Phi + 2\Phi_{ct} + 4\Phi_{cy} + 2\Phi_{ct}). \quad (V-57b)$$

Входящие в равенства (V-56a, b, c и 57a, b) частичные потоки рассеяния Φ_{ct} , Φ_{cy} и Φ_{ct} могут быть приближенно определены с помощью формул (V-20, 55, 30). Как видно из выражений (V-57a, b), угловой поток Φ_{cy} входит в общий поток полюса четыре раза; поэтому его влияние на общий поток рассеяния во многих случаях оказывается весьма существенным.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЖДУПОЛЮСНОГО РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

Формулы (V-56a, b, c и 57a, b) вместе с выражениями (V-20, 55, 30) позволяют с достаточной для практики точностью определить расчетным путем все основные составляющие потока междуполюсного рассеяния, а вслед за тем — и полные потоки в различных сечениях магнитной цепи. Однако в некоторых случаях, когда требуется большая точность определения этих потоков, целесообразно, помимо расчета (или даже вместо этого расчета), использовать опытные данные, полученные в результате физического моделирования междуполюсного рассеяния в электролитической ванне.

Ввиду объемного характера исследуемого поля рассеяния электроды и межэлектродное пространство в электролитической ванне должны быть также объемными и иметь такую же форму, как и соответствующие участки (полюса и междуполюсные пространства) в реальной машине.

При таких условиях наиболее удобным материалом для изготовления электродов может служить графит, который, с одной стороны, имеет достаточно высокую электропроводимость, а с другой — легко поддается механической обработке, и которому нетрудно придать любую желаемую форму. Кроме того, графит не окисляется и не изменяется под влиянием электролитических процессов, поэтому в качестве электролита можно с успехом применять обыкновенную водопроводную воду.

В силу условий симметрии обычно оказывается возможным ограничиться моделированием лишь одного полюсного деления, находящегося между осевыми плоскостями двух соседних полюсов I и II (см. рис. 86). В этом случае модель будет представлять собой две расположенные под углом 2φ (рис. 90) пластины из изоляционного материала (лучше всего — из органического стекла), к внутренним сторонам которых при-

креплены (с помощью, например, винтов) выполненные из графита две половинки полюсов и две призматических детали, имитирующие пакет статора машины и точно установленные с необходимым зазором по отношению к полюсам (рис. 105). При установке обеих пластин с моделями под необходимым

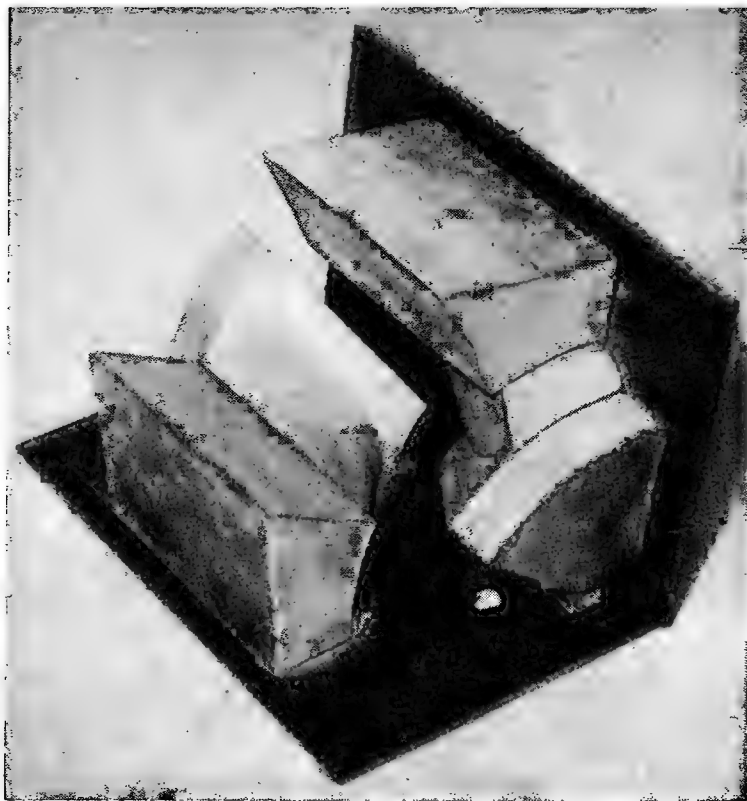


Рис. 105. Устройство для моделирования в электролитической ванне полей рассеяния между когтеобразными полюсами.

углом 2ϕ призмы, моделирующие пакет статора, должны оказаться в непосредственной близости друг от друга, но не должны иметь между собой электрического контакта, так как иначе невозможно будет измерить проходящий от одной призмы к другой полезный поток. С этой целью боковые соприкасающиеся между собой поверхности призм разделяются тонким слоем изоляции (например, лакоткани). Аналогичный прием используется и для определения величин потоков в раз-

личных сечениях полюса или статора. В этом случае в необходимых сечениях модель разрезается и место разреза изолируется тонким слоем изоляции.

От каждой изолированной части модели выводится отдельный электрический вывод. Этот вывод удобно выполнить в виде гибкого изолированного провода, соединив его с моделью через один из винтов, крепящих ее к пластине. Между каждой парой изолированных друг от друга частей модели включается

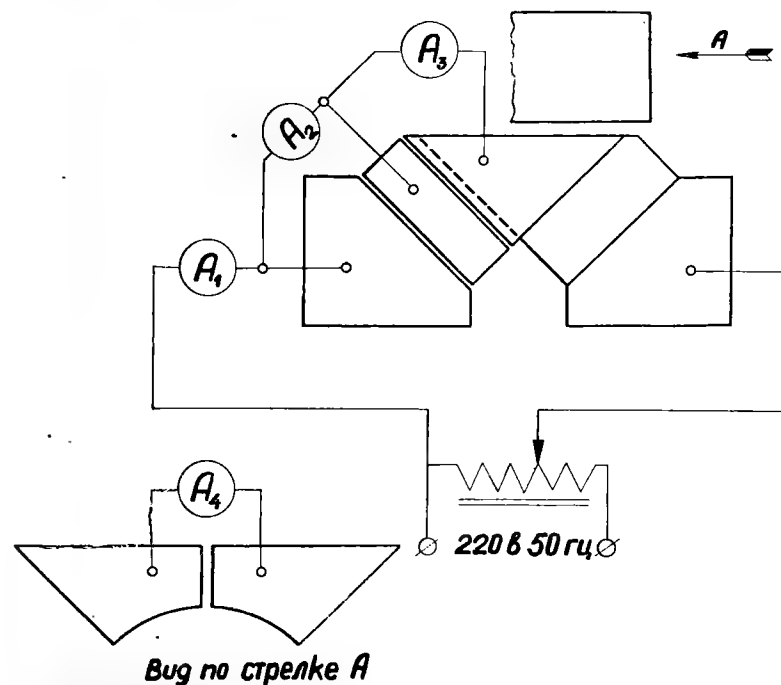


Рис. 106. Примерная схема установки для моделирования полей рассеяния когтеобразных полюсов.

низкоомный миллиамперметр, по показаниям которого и можно судить о величине проходящего через данное сечение потока.

С целью снижения влияния электролиза воды и поляризации электродов измерения необходимо делать на переменном токе, при возможно малых плотностях тока в электролите. Примерная схема соединений элементов моделирующей установки приведена на рис. 106.

В силу геометрического подобия модели действительной машины и физического подобия электрического поля токов в электролите магнитному полю в действительной машине, полу-

ченные в процессе измерений токи в различных сечениях модели окажутся пропорциональными магнитным потокам в соответствующих сечениях моделируемой машины; в связи с чем можно написать:

$$I_1 : I_2 : I_3 : I_4 \dots = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 : \Phi_4 \dots \quad (V-58a)$$

Из этого соотношения следует, что для определения любого из моделируемых потоков Φ_i необходимо, кроме данных моделирования (т. е. токов $I_1, I_2, I_3 \dots$), определить хотя бы один из потоков, входящих в правую часть соотношения (V-58a). Наиболее просто это можно сделать по отношению к полезному потоку полюса Φ , для которого известно соотношение

$$\Phi = \alpha_\delta \tau l_i B_\delta. \quad (V-58b)$$

Входящую в это равенство индукцию в зазоре под серединой полюса B_δ можно выразить через расчетную (с учетом коэффициента Картера) величину зазора δ' и приходящуюся на этот зазор м. д. с. F_δ , которая при холостом ходе равна половине межполюсной м. д. с. F_{NS} :

$$B_\delta = \mu_0 \frac{F_\delta}{\delta'} = \mu_0 \frac{F_{NS}}{2\delta'}. \quad (V-58c)$$

Поэтому на основании равенств (V-58b, c) можно написать:

$$\Phi = \mu_0 \alpha_\delta \frac{\tau l_i}{2\delta'} F_{NS}, \quad (V-58d)$$

и если величины τ, l_i и δ в модели строго пропорциональны соответствующим размерам реальной машины, то, полагая, что $\Phi = \Phi_1$, можно с помощью формул (V-58d и a) определить в абсолютных величинах все моделированные потоки. Однако в некоторых случаях оказывается удобным величину зазора на модели выполнять непропорциональной остальным величинам (например, несколько большей, чем это требуется по условиям пропорциональности). В этом случае для определения потоков $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ и т. д. (V-58a) в качестве величины Φ_1 необходимо брать некоторый расчетный поток Φ_p , который имел бы место в реальной машине в том случае, если бы ее воздушный зазор δ_p был выполнен пропорциональным зазору δ_m на модели:

$$\Phi_p = \mu_0 \alpha_\delta \frac{\tau l_i}{2\delta_p} F_{NS}. \quad (V-58e)$$

Полагая $\Phi_p = \Phi_1$ и подставляя это соотношение в (V-58a), можно найти все потоки, в том числе и полезный поток Φ , для которого согласно равенствам (V-58d, e) имеем:

$$\Phi = \frac{\delta'}{\delta_p} \cdot \Phi_p. \quad (V-58f)$$

В расчетах обычно вместо потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3 и т. д. (V-58) удобно иметь соответствующие магнитные проводимости $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, равные отношению потока к межполюсной м. д. с. F_{NS} :

$$\Lambda_i = \frac{\Phi_i}{F_{NS}}. \quad (V-59a)$$

Эти проводимости, очевидно, пропорциональны соответствующим потокам, и поэтому для них вместо соотношения (V-58a) можно написать:

$$\Lambda_1 : \Lambda_2 : \Lambda_3 : \Lambda_4 \dots = I_1 : I_2 : I_3 : I_4 \dots, \quad (V-59b)$$

и для определения любой из этих проводимостей достаточно иметь лишь одну расчетную проводимость воздушного зазора Λ_p , которая согласно (V-59a и 59b) равна:

$$\Lambda_p = \mu_0 \alpha_\delta \frac{\tau l_i}{2\delta_p}. \quad (V-59c)$$

Если бы размеры модели τ_m, l_m, δ_m были равны размерам моделируемых полюсов, то тогда для воздушной проводимости зазора можно было бы согласно (V-59c) написать:

$$\Lambda_m = \mu_0 \alpha_\delta \frac{\tau_m l_m}{2\delta_m}. \quad (V-59d)$$

Если же размеры машины оказываются в m раз больше соответствующих размеров модели, так что

$$\tau = m \tau_m; l_i = m l_m; \delta = m \delta_m, \quad (V-59e)$$

то тогда, согласно выражениям (V-59 c, d, e), будет иметь место соотношение

$$\Lambda_p = m \Lambda_m, \quad (V-60)$$

показывающее, что магнитные проводимости путей потоков ротора при условии сохранения геометрического подобия возрастают пропорционально линейному масштабному фактору m .

Опыт работы с моделирующими устройствами в виде электролитической ванны описанного выше типа показывает большую практическую эффективность и надежность этого способа определения потоков рассеяния в машинах с когтеобразными полюсами.

в. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОТОКИ РАССЕЯНИЯ В МАШИНАХ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Помимо рассеяния, в межполюсном пространстве в машинах с когтеобразными полюсами, как уже указывалось в главе II, могут иметь место еще и другие потоки рассеяния, которые можно назвать дополнительными.

К такого рода дополнительным потокам следует прежде всего отнести *поток рассеяния через вал* Φ_{cb} , который в случае выполнения щитов, станины и вала машины из ферромагнитного материала является неизбежным явлением.

Величина потока рассеяния через вал Φ_{cb} может быть определена весьма простым путем. Для этого прежде всего необходимо найти напряженность поля в рассматриваемом отрезке вала H_{cb} , для чего необходимо разделить приходящуюся на этот отрезок м.д.с. F_{cb} на длину отрезка l_b :

$$H_{cb} = \frac{F_{cb}}{l_b}. \quad (V-61a)$$

По величине H_{cb} с помощью кривой намагничивания для материала вала можно определить соответствующую индукцию в валу B_{cb} , а затем — после умножения на площадь сечения вала S_b — и искомый поток Φ_{cb} :

$$\Phi_{cb} = B_{cb} \cdot S_b = B_{cb} \cdot \frac{\pi}{4} d_b^2. \quad (V-61b)$$

В бесконтактных синхронных машинах с когтеобразными полюсами (см. рис. 63), как уже упоминалось в главе II, заметную роль играет еще *собственный поток рассеяния катушки возбуждения* Φ_{ck} . Этот поток образуется в основном между поверхностью кольцеобразного выступа, на котором расположена катушка возбуждения, и внутренней поверхностью подшипниковой щита (или станины). Величина этого потока сравнительно невелика, так как почти все его силовые линии сцепляются лишь с некоторой частью витков катушки (рис. 107).

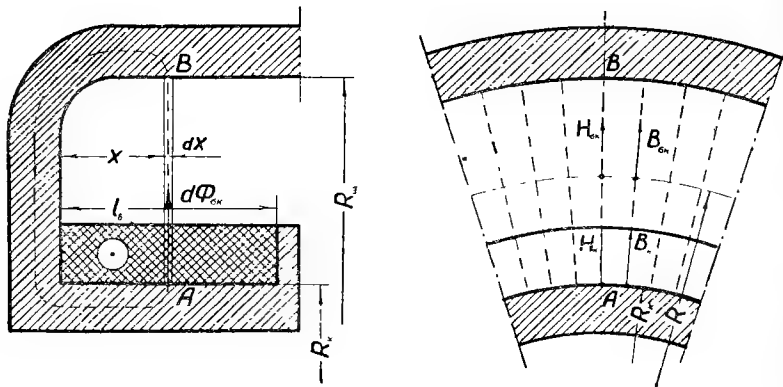


Рис. 107. К расчету потока рассеяния катушки возбуждения.

Для приближенного определения потока Φ_{ck} можно допустить, что силовые линии его являются прямыми, соединяющими верхнюю часть щита с кольцеобразным выступом (рис. 107). Тогда картина поля между рассеяния Φ_{ck} будет аналогична картине поля между двумя коаксиальными цилиндрами, и поэтому для индукции B_{ck} и напряженности поля H_{ck} на произвольном расстоянии R от оси машины можно написать:

$$B_{ck} = B_k \frac{R_k}{R}; \quad H_{ck} = H_k \frac{R_k}{R}, \quad (V-62a)$$

где B_k и H_k — индукция и напряженность поля на поверхности кольцеобразного выступа.

С другой стороны, для м.д.с. между точками A и B согласно известным соотношениям имеем:

$$F_{AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l} = \int_{R_k}^{R_{ш}} H_{ck} dR = H_k R_k \int_{R_k}^{R_{ш}} \frac{dR}{R} = H_k R_k \ln \frac{R_{ш}}{R_k}, \quad (V-62b)$$

откуда

$$H_k = \frac{F_{AB}}{R_k \ln \frac{R_{ш}}{R_k}} \quad (V-62c)$$

и

$$B_k = \mu_0 H_k = \mu_0 \frac{F_{AB}}{R_k \ln \frac{R_{ш}}{R_k}}. \quad (V-62d)$$

Элементарный поток $d\Phi_{ck}$ (рис. 107) с учетом равенства (V-62d) будет равен:

$$d\Phi_{ck} = B_k dS_k = B_k \cdot 2\pi R_k dx = 2\pi \mu_0 \frac{F_{AB}}{\ln \frac{R_{ш}}{R_k}} dx. \quad (V-62)$$

Пренебрегая вначале падением м.д.с. в стали щита и кольцеобразного выступа, м.д.с. F_{AB} можно считать равной соответствующей части м.д.с. катушки возбуждения:

$$F_{AB} \approx F_b \frac{S}{S_b} \approx F_b \frac{x}{l_b}, \quad (V-63a)$$

где F_b и S_b — полные м.д.с. и площадь сечения катушки возбуждения,

S — площадь, охватываемая потоком $d\Phi_k$ (рис. 107).

Из равенств (V-63a и 62) следует:

$$d\Phi_{\sigma k} = 2\pi\mu_0 \cdot \frac{F_b}{l_b} \cdot \frac{xdx}{\ln \frac{R_{\text{ш}}}{R_r}}. \quad (\text{V-63b})$$

Интегрируя это выражение в пределах от $x=0$ до $x=l_0$ и подставляя значение $\mu_0=0,4\pi$, нетрудно получить следующее окончательное выражение для собственного потока рассеяния катушки:

$$\Phi_{\sigma k} = 0,4\pi^2 \frac{l_b}{\ln \frac{R_{\text{ш}}}{R_r}} \cdot F_b = \frac{3,95l_b}{\ln \frac{R_{\text{ш}}}{R_r}} \cdot F_b. \quad (\text{V-63})$$

Выводы

На основании изложенного в настоящей главе можно сделать следующие выводы.

1. Ввиду весьма сложного, пространственного характера поля рассеяния между контеобразными полюсами аналитическое исследование и расчет этого поля практически невозможно выполнить только при введении целого ряда упрощающих допущений:

- а) условной замены пространственного поля суммой поверхностнопараллельных полей, образуемых путем проведения ряда поверхностей конической формы (см. рис. 86);
- б) условной замены поверхностнопараллельных полей плоскостнопараллельными, полученными в результате развертывания конических поверхностей в плоскости;
- в) пренебрежения падением магнитного потенциала вдоль стальных поверхностей;
- г) условной разбивки исследуемого поля рассеяния на две области: область тангенциального поля и область торцового поля.

2. Для расчета тангенциального поля рассеяния необходимо решить две задачи: определить местоположение граничных точек между полезным потоком и потоком рассеяния и затем выполнить расчет тангенциального поля рассеяния. Первая из этих задач успешно разрешается с помощью метода конформных преобразований и приводит к простому результату в виде формулы (V-17) и кривой рис. 97. Как следует из этой кривой, при достаточно малых значениях отношения воздушного зазора к междуполосному расстоянию искомого расточки статора на расстоянии, равном 28% междуполосного расстояния.

Вторая задача — расчет тангенциального поля рассеяния может быть сравнительно просто решена путем введения допущения, заключающегося в условном отождествлении искомого поля с полем между двумя плоскостями, расположенными под углом. При этом величина потока тангенциального поля рассеяния может быть определена по формуле (V-20). Анализ этой формулы показывает, что поток тангенциального рассеяния возрастает при увеличении числа пар полюсов и отношения длины пакета статора к диаметру его расточки.

3. При расчете торцового поля междуполосного рассеяния целесообразно разбить это поле на три части, из которых одна представляет собой собственно торцовый поток, а две других — потоки углового рассеяния, соответствующие ребрам внутренней торцовой поверхности полюса.

Собственно торцовый поток можно сравнительно просто определить с помощью формулы (V-30), полученной в предположении, что напряженность торцового поля изменяется в междуполосном зазоре по прямолинейному закону (V-29a).

Определение потока углового рассеяния несколько более сложно и при некоторых допущениях может быть выполнено с помощью метода конформных преобразований.

В результате оказывается возможным получить достаточно простое выражение (V-54) для коэффициента магнитной проводимости углового рассеяния. Из приведенной на рис. 103 зависимости этого коэффициента от отношения расстояния между углом и плоскостью к толщине торца полюса видно, что при обычно встречающихся на практике значениях этого отношения величина коэффициента магнитной проводимости углового рассеяния колеблется примерно от 1 до 2.

4. Поток рассеяния через любую поверхность полюсной системы (боковую, торцовую или междуполосную) может быть согласно формулам (V-56a, b, c) определен через найденные выше три составляющие: тангенциальный, торцовый и угловой потоки. Величина углового потока входит в величину полного потока полюса четыре раза, поэтому влияние этой составляющей потока рассеяния во многих случаях оказывается весьма существенным.

5. При определении потоков рассеяния в машинах с контеобразными полюсами, помимо расчетных методов, в ряде случаев целесообразно прибегнуть к моделированию полей рассеяния с помощью объемной электролитической ванны. При условии геометрического подобия электродов ванны реальным полюсным системам оказывается возможным определить как в относительных, так и в абсолютных величинах любую составляющую потока полюса.

6. Кроме междуполюсного рассеяния, в машинах с когтеобразными полюсами могут иметь место еще и другие потоки рассеяния, например поток рассеяния через вал, собственный поток рассеяния неподвижной катушки возбуждения и т. п. Приближенный расчет этих потоков может быть выполнен по несложным формулам (V-61 и 63).

ГЛАВА VI

ГЕОМЕТРИЯ КОГТЕОБРАЗНЫХ ПОЛЮСОВ

Наряду с необходимостью достаточно точного учета всех особенностей магнитной цепи синхронной машины с когтеобразными полюсами при проектировании таких машин оказывается весьма важным также правильный выбор размеров и формы когтеобразного полюса, его «геометрии».

Как уже указывалось в главе II, основная функция когтеобразного полюса сводится к тому, чтобы отклонить поток полюса в сторону от средней плоскости машины и передать его из воздушного зазора машины к сборному кольцу данной полярности. Для выполнения такой функции, очевидно, необходимо, чтобы когтеобразный полюс был несимметричным, т. е. чтобы входное и выходное сечения полюса (по ходу потока) были бы расположены неодинаково по отношению к средней плоскости машины, так что если одно из этих сечений (например, AB на рис. 108) располагается симметрично относительно средней плоскости OO , то другое (CD) должно быть расположено сбоку от нее. Нетрудно заметить, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для правильной работы когтеобразного полюса. Поэтому несимметричность является, по существу, единственным обязательным требованием к конструктивной форме когтеобразного полюса и, следовательно, основной его особенностью.

Однако требование несимметричности полюса является слишком общим и недостаточным для того, чтобы можно было с достаточной определенностью выявить рациональную конструктивную форму когтеобразного полюса. Поэтому необходимо к этому основному требованию добавить еще некоторые дополнительные условия. Такие условия диктуются экономическими соображениями, например стремлением уменьшить по возможности вес полюса при возможно большей его пропускной способности.

Поэтому, прежде чем переходить к дальнейшему анализу геометрии когтеобразных полюсов, целесообразно рассмотреть возможные пути оценки их экономических качеств.

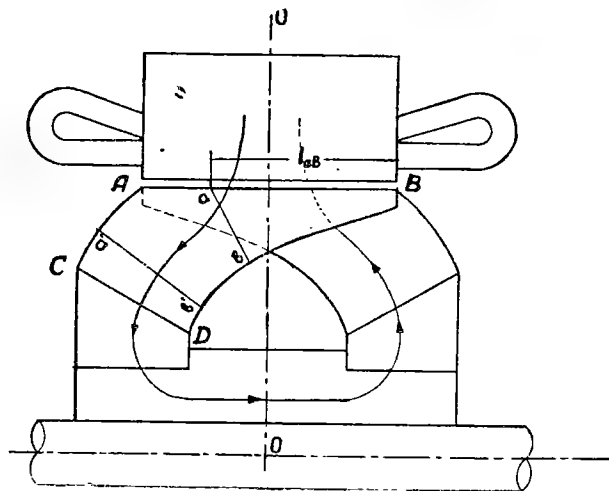


Рис. 108. К пояснению основного свойства — несимметричности когтеобразного полюса.

1. ДОБРОТНОСТЬ МАГНИТОПРОВОДОВ

Экономичность магнитной цепи, как и всякой другой конструкции, сооружения и т. п., является, как известно, весьма сложным понятием. Поэтому в целях упрощения анализа целесообразно рассмотреть здесь только одну сторону этого сложного вопроса, касающуюся оценки степени использования активных материалов цепи (стали магнитопровода и меди обмотки возбуждения) и величины мощности, необходимой на ее возбуждение.

Подобную оценку можно получить на основании рассмотрения таких параметров магнитной цепи, как вес или объем стали магнитопровода, величина проходящего по нему магнитного потока и необходимая для его проведения магнитодвижущая сила. Очевидно, что чем больше при прочих равных условиях магнитный поток Φ и длина его пути l и чем меньше объем стали V и м.д.с. магнитопровода F , тем меньше будут относительные затраты материалов и потери мощности на возбуждение и, следовательно, тем более экономичным (в указанном выше ограниченном смысле) можно считать рассматриваемый магнитопровод. Иначе говоря, степень эконо-

мичности магнитопровода можно считать тем более высокой, чем большее значение имеет величина

$$Q' = \frac{\Phi l}{FV}, \quad (\text{VI-1a})$$

которая, таким образом, и могла бы служить некоей обобщенной характеристикой экономичности магнитной цепи. Однако, величина Q' неудобна для сравнительного анализа различных магнитопроводов, так как, имея сложную формулу размерности, она существенно зависит не только от экономичности магнитопровода, но и от его габаритов. Поэтому выражение (VI-1a) целесообразно дополнить, например, следующим образом:

$$Q = \frac{\Phi^2}{FV\mu_{\text{ср}}}, \quad (\text{VI-1})$$

где через $\mu_{\text{ср}}$ обозначено среднее по всему объему магнитопровода значение магнитной проницаемости его материала:

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{1}{V} \int_V \mu dV. \quad (\text{VI-1b})$$

Величина Q , как нетрудно проверить, не имеет размерности и не зависит от габаритов магнитопровода. Ее можно определить как *добротность магнитопровода*. Как видно из формулы (VI-1), величина добротности Q тем выше, чем меньше необходимые м.д.с. F и объем материала V для проведения заданного потока Φ вдоль заданной длины l . Наоборот, при заданных м.д.с. F и объеме V добротность магнитопровода Q получается тем выше, чем большую величину имеет поток Φ и чем дальше он может быть проведен вдоль длины l .

В простейшем случае, когда рассматриваемый участок магнитопровода имеет форму прямого цилиндра или призмы с постоянным сечением S_0 , магнитное поле в нем оказывается однородным, и для величин, входящих в правую часть формулы (VI-1) можно написать:

$$\Phi = B_0 S_0, \quad F = H_0 l, \quad V = S_0 l, \quad \mu_{\text{ср}} = \frac{B_0}{H_0}, \quad (\text{VI-2a})$$

где B_0 и H_0 — магнитная индукция и напряженность магнитного поля, постоянные во всем объеме магнитопровода.

Подстановка выражений (VI-2a) в равенство (VI-1) дает:

$$Q_0 = 1, \quad (\text{VI-2b})$$

и, следовательно, добротность всякого магнитопровода, имеющего постоянное сечение и однородное поле, равна единице.

В более общем случае, когда сечение магнитопровода изменяется вдоль его длины, но в пределах каждого из сечений поле оказывается равномерным (такие магнитопроводы называются, как известно, линейными) можно написать (рис. 109):

$$\Phi = B \cdot S; \quad F = \int_0^l H dx; \quad dV = S \cdot dx; \quad \mu = \frac{B}{H}, \quad (\text{VI-3a})$$

где B и H — магнитная индукция и напряженность магнитного поля в сечении S .

Из равенств (VI-3a и 1b) следует:

$$F = \int_0^l H dx = \int_0^l \frac{B}{\mu} dx = \int_0^l \frac{\Phi}{\mu S} dx, \quad (\text{VI-3b})$$

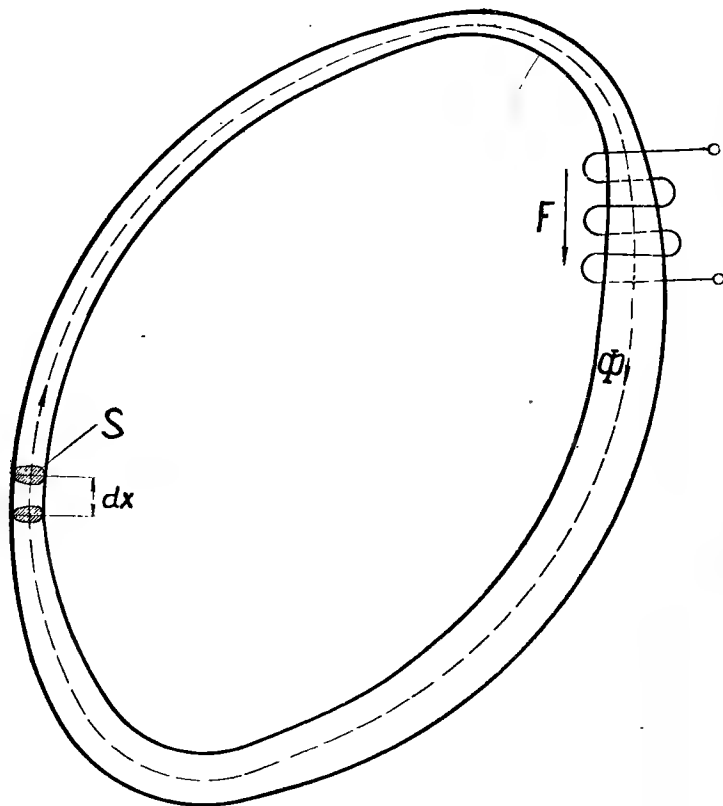


Рис. 109. К выводу выражения для добротности линейного магнитопровода.

$$V = \int_0^l S dx, \quad (\text{VI-3c})$$

$$\mu_{\text{ср}} V = \int_0^l \mu S dx. \quad (\text{VI-3d})$$

Предполагая, что величина потока Φ постоянна для всех сечений магнитопровода и, следовательно, от x не зависит, равенство (VI-3b) можно переписать в виде:

$$F = \Phi \int_0^l \frac{dx}{\mu S}. \quad (\text{VI-4a})$$

Кроме того, обратив внимание на известное выражение для средней величины

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{l} \int_0^l S dx, \quad (\text{VI-4b})$$

можно преобразовать равенства (VI-3c, d):

$$V = S_{\text{ср}} l, \quad (\text{VI-4c})$$

$$\mu_{\text{ср}} \cdot S_{\text{ср}} = \frac{1}{l} \int_0^l \mu S dx. \quad (\text{VI-4d})$$

В дальнейшем целесообразно для координаты x и величины μS ввести относительные величины:

$$t = \frac{x}{l}, \quad (\text{VI-5a})$$

$$\sigma = \frac{\mu S}{\mu_{\text{ср}} S_{\text{ср}}}. \quad (\text{VI-5b})$$

При этом равенство (VI-4a) примет вид:

$$F = \frac{\Phi l}{\mu_{\text{ср}} S_{\text{ср}}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sigma}, \quad (\text{VI-6})$$

а вместо выражений (VI-3d и 4d) с учетом соотношения (VI-4c) будем иметь:

$$1 = \int_0^1 \sigma dt. \quad (\text{VI-7})$$

Подставив теперь формулы (VI-6 и 4с) в основное равенство (VI-1), получим следующее выражение для добротности линейного магнитопровода:

$$Q = \frac{1}{\int_0^1 \frac{dt}{\sigma}}. \quad (\text{VI-8})$$

Для оценки величины интеграла в знаменателе дроби (VI-8) можно с учетом равенства (VI-7) написать:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sigma} = \int_0^1 \frac{dt}{\sigma} + 1 - \int_0^1 \sigma dt = 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma \right) dt. \quad (\text{VI-8a})$$

Подынтегральную функцию в последнем интеграле можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} - \sigma &= \frac{1 - \sigma^2}{\sigma} = (1 - \sigma) \frac{1 + \sigma}{\sigma} = (1 - \sigma) \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) = \\ &= (1 - \sigma) \left(2 + \frac{1 - \sigma}{\sigma} \right) = 2(1 - \sigma) + \frac{(1 - \sigma)^2}{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{VI-8b})$$

Интеграл от первого слагаемого этого выражения с учетом условия (VI-7) дает в результате нуль. Второе слагаемое является существенно положительной величиной, и поэтому интеграл от него также будет всегда положительным. Следовательно,

$$\kappa = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma \right) dt = \int_0^1 \frac{(1 - \sigma)^2}{\sigma} dt \geq 0. \quad (\text{VI-9a})$$

С учетом этого соотношения для выражений (VI-8a и 8) можно написать:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sigma} = 1 + \kappa \geq 1, \quad (\text{VI-9b})$$

$$Q = \frac{1}{1 + \kappa} \leq 1. \quad (\text{VI-9})$$

Сравнивая выражения (VI-9 и 2b), нетрудно прийти к заключению, что добротность линейного магнитопровода не может быть больше единицы и становится равной ей лишь при постоянстве сечения и однородности поля в магнитопроводе. Отсюда можно сделать вывод, что постоянство сечения и однородность поля обеспечивают наивысшую возможную доброт-

ность и поэтому такие конструктивные формы магнитопроводов следует считать наиболее экономически целесообразными.

Этот вывод нетрудно распространить и на более общие случаи. Так, если магнитопровод нельзя считать линейным и индукция по его сечениям распределена неравномерно, то можно разбить магнитное поле такого магнитопровода на отдельные достаточно тонкие силовые трубки. Тогда, применяя к ним сделанный выше вывод, можно констатировать, что добротность любой из трубок будет максимальной в том случае, когда сечение трубки станет постоянным по всей ее длине, а

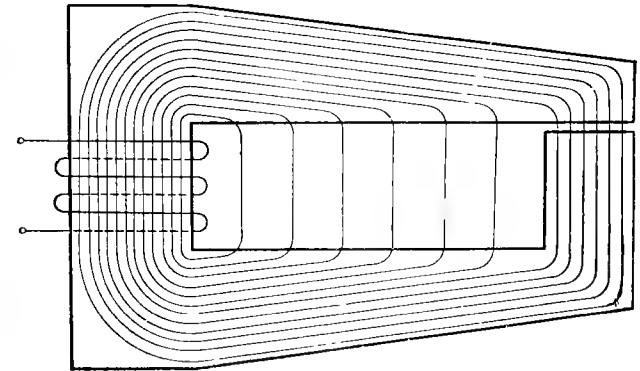


Рис. 110. К учету рассеяния потока через боковые поверхности магнитопровода.

поле в пределах трубки окажется всюду однородным. То же самое можно, очевидно, сказать и о всей сумме отдельных трубок, т. е. магнитопроводе в целом, и, следовательно, сформулированное выше условие обеспечения максимальной добротности оказывается справедливым для магнитопровода любой формы.

Несколько иначе обстоит дело в тех случаях, когда магнитный поток вследствие рассеяния через воздух или другие пути оказывается непостоянным по длине магнитопровода (рис. 110). Применяя здесь тот же прием разбивки магнитного поля на отдельные трубки, легко заметить, что особенность этого случая состоит в том, что часть трубок пересекает боковую поверхность магнитопровода и уходит за его пределы, в связи с чем количество трубок в самом магнитопроводе изменяется вдоль его длины.

Поэтому, если предположить, что каждая силовая трубка в отдельности удовлетворяет условию максимума добротности и имеет, следовательно, постоянное сечение и равномерное

поле, то общее сечение магнитопровода не может в этом случае оставаться постоянным, а наоборот, должно изменяться по мере выхода из него отдельных трубок, т. е. по мере изменения потока в магнитопроводе.

Учитывая это обстоятельство, можно прийти к выводу, что в подобных случаях сечение магнитопровода следует изменять вдоль его длины таким образом, чтобы было обеспечено постоянство отношения потока к площади сечения, т. е. постоянство магнитной индукции. Такому условию удовлетворяют, как нетрудно заметить, и все рассмотренные выше более простые случаи, поэтому его можно считать наиболее общим критерием обеспечения максимума добротности. Этот критерий можно сформулировать в следующем виде.

В целях достижения максимальной добротности магнитопровода следует стремиться выполнять его таким образом, чтобы магнитная индукция во всех его точках была одинаковой.

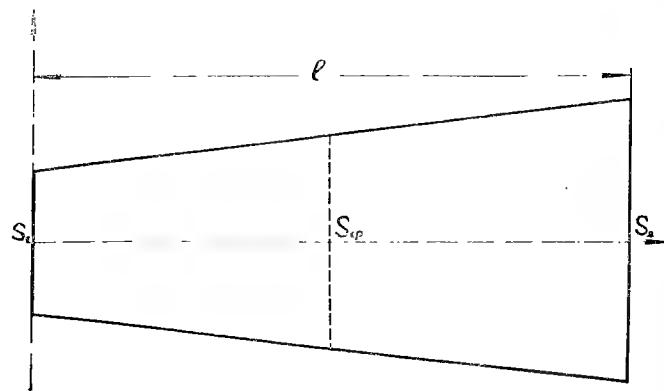


Рис. 111. Магнитопровод с линейно изменяющимся сечением.

Представляет интерес оценить, насколько значительным может быть снижение добротности магнитопровода при несоблюдении указанного критерия, т. е. при неодинаковой индукции в различных точках цепи. С этой целью можно рассмотреть один из простейших частных случаев, когда поток в магнитопроводе постоянен, а площадь поперечного сечения изменяется вдоль длины магнитопровода по линейному закону (рис. 111):

$$S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{l} x, \quad (\text{VI-10})$$

где S_1 — площадь наименьшего крайнего сечения,
 S_2 — площадь наибольшего крайнего сечения.

Среднее значение площади в этом случае будет равно

$$S_{cp} = \frac{S_1 + S_2}{2}. \quad (\text{VI-10a})$$

Поэтому для относительной величины площади магнитопровода в соответствии с формулами (VI-10, 10a и 5a) (VI-5a) можно написать:

$$\frac{S}{S_{cp}} = \frac{1 + 2\beta t}{1 + \beta}, \quad (\text{VI-10b})$$

где коэффициент β характеризует степень «конусности» магнитопровода:

$$\beta = \frac{S_2 - S_1}{2S_1}. \quad (\text{VI-10c})$$

В качестве характеристики степени насыщения магнитопровода удобно принять величину магнитной индукции B_0 в среднем сечении S_{cp} . Тогда индукцию в любом другом сечении можно найти с помощью формулы (VI-10b):

$$\frac{B}{B_0} = \frac{S_{cp}}{S} = \frac{1 + \beta}{1 + 2\beta t}. \quad (\text{VI-10d})$$

Определяя по этой формуле значения индукции в нескольких сечениях и находя затем соответствующие значения напряженности магнитного поля в магнитопроводе H , можно путем численного или графического интегрирования вычислить добротность магнитопровода Q . Для этой цели удобно преобразовать формулу (VI-8) следующим образом.

Интеграл в знаменателе этой формулы на основании соотношений (VI-5b, 4d и 5a) можно представить в виде:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sigma} = \mu_{cp} S_{cp} \int_0^1 \frac{dt}{\mu S} = \int_0^1 \mu S dt \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\mu S}. \quad (\text{VI-11a})$$

Вместо величины μS можно написать:

$$\mu S = \frac{B \cdot S}{H} = \frac{\Phi}{H}, \quad (\text{VI-11b})$$

и тогда, имея в виду постоянство потока Φ и возможность вынесения его за знак интеграла, нетрудно привести равенство (VI-11a) к виду:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sigma} = \int_0^1 H dt \cdot \int_0^1 \frac{dt}{H}. \quad (\text{VI-11})$$

Это соотношение вместе с формулой (VI-8) показывает, что для определения добротности линейного магнитопровода

достаточно знать зависимость напряженности магнитного поля H от положения рассматриваемого сечения (от координаты t). Эта зависимость легко определяется по заданным значениям индукции B с помощью кривой намагничивания материала магнитопровода.

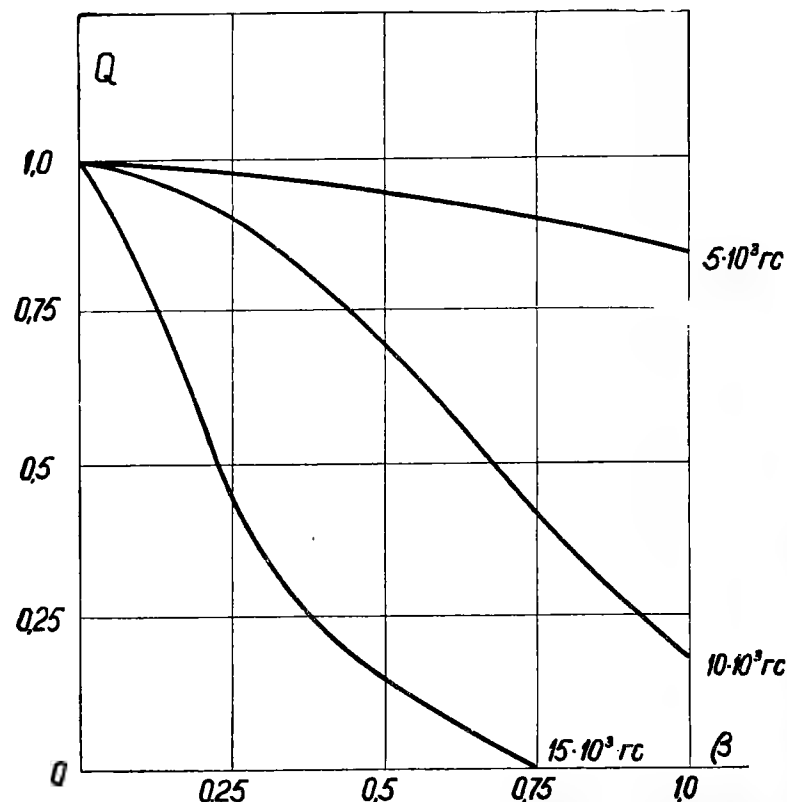


Рис. 112. Зависимость добротности магнитопровода с линейно изменяющимся сечением от степени конусности β и от средней индукции B_0 .

На рис. 112 представлены кривые добротности магнитопровода с линейно изменяющимся сечением (рис. 111; формула VI-10), выполненного из электротехнической стали марки Э1А. Из этих кривых следует, что в случае небольших насыщений стали, когда индукция в среднем сечении B_0 не превышает 5—6 тыс. Гс, влияние конусности магнитопровода на его добротность получается сравнительно небольшим и не превышает 10—20% даже при $\beta = 1$, когда одно из крайних

сечений оказывается втрое большим другого ($S_2 = 3S_1$) (VI-10с).

Наоборот, при достаточно больших насыщениях, когда, например, средняя индукция составляет 15 000 Гс, зависимость добротности от степени конусности оказывается весьма сильной: при разнице сечений в два раза ($S_2 = 2S_1$, $\beta = 0,5$), добротность уменьшается в 6 раз против случая цилиндрического магнитопровода с однородным полем. Это, очевидно, означает, что если при $B_0 = 15\,000$ Гс выполнить магнитопровод так, чтобы одно крайнее сечение было бы вдвое больше другого, то на изготовление такого магнитопровода потребуется в 6 раз больше стали, чем в том случае, когда сечение оставалось бы постоянным. Если же расход стали попытаться оставить прежним, то тогда в 6 раз увеличится м. д. с. магнитопровода и не менее чем во столько же раз возрастет расход энергии на возбуждение цепи. Этот пример показывает, насколько серьезным становится вопрос о добротности магнитопровода при значительных насыщениях и неравномерности сечения.

2. «ИДЕАЛЬНАЯ» ФОРМА КОГТЕОБРАЗНОГО ПОЛЮСА

В предыдущем параграфе удалось установить, что максимальная величина добротности и, следовательно, наилучшие экономические показатели магнитопровода получаются в том случае, когда обеспечено постоянство среднего значения индукции во всех сечениях на пути потока в рассматриваемом участке магнитопровода.

Применяя этот принцип построения магнитной цепи к синхронной машине с когтеобразными полюсами, целесообразно вначале сделать некоторые упрощающие предположения.

Во-первых, можно положить, что боковые поверхности когтеобразного полюса A_1E_1 и A_2E_2 (рис. 113) представляют собой две параллельные плоскости, так что толщина полюса в тангенциальном (вдоль окружности ротора) направлении оказывается всюду одинаковой, равной хорде полюсной дуги b_p . Такая форма боковых поверхностей наиболее проста и удобна технологически, так как обеспечивает постоянство полюсной дуги независимо от возможных при литье смещений отдельных полюсов в радиальном направлении.

Во-вторых, целесообразно вначале считать, что полезный поток полюса равномерно распределен по его активной (обращенной к воздушному зазору) поверхности (AB на рис. 108, A_1A_2 на рис. 113). Такое предположение хотя и не вполне соответствует действительности, однако, как видно из примера,

приведенного в главе IV, может быть принято в приближенных расчетах без заметного ущерба для их точности.

Наконец, в-третьих, можно условно предположить, что потоки междуполусного рассеяния входят в полюс не через его боковые и торцовые поверхности, а целиком через его активную поверхность. При этом получаются более трудные условия прохождения потока по полюсу, ибо поток рассеяния проходит полностью вдоль всего полюса; поэтому величины индук-

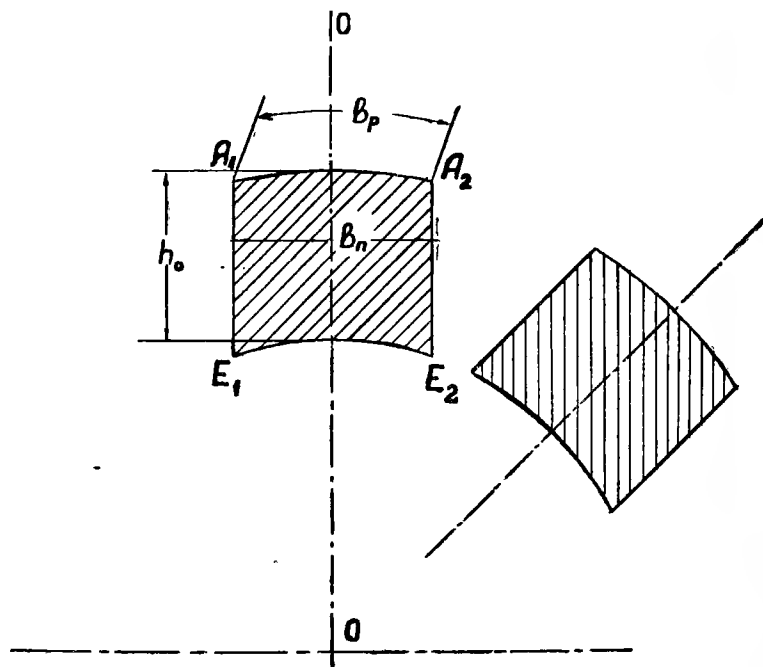


Рис. 113. Поперечный разрез индуктора с когтеобразными полюсами.

ции и м. д. с. полюса окажутся несколько завышенными, а при расчете полного м. д. с. цепи возбуждения получится результат с некоторым «запасом».

При сделанных предположениях величина потока в любом сечении полюса ab (см. рис. 108) должна быть, очевидно, пропорциональна расстоянию aB от этого сечения до тонкого конца полюса B . Действительно, поскольку поток входит в полюс только через его активную поверхность, а величина индукции на этой поверхности всюду постоянна и равна E_0 , то рассматриваемый поток Φ_{ab} сквозь сечение ab должен быть

пропорционален площади S_{ab} соответствующего участка aB активной поверхности полюса:

$$\Phi_{ab} = B_0 S_{ab}. \quad (\text{VI-12a})$$

Поскольку, с другой стороны, полюс имеет всюду одинаковую толщину и полная дуга b_p сохраняется постоянной вдоль всей длины полюса, то площадь S_{ab} оказывается пропорциональной длине l_{ab} участка aB :

$$S_{ab} = b_p l_{ab}, \quad (\text{VI-12b})$$

и, следовательно, согласно равенствам (VI-12a, b) можно написать:

$$\Phi_{ab} = B_0 b_p l_{ab}. \quad (\text{VI-12})$$

Таким образом, поток Φ_{ab} в произвольном сечении ab возрастает по линейному закону по мере продвижения этого сечения по направлению от тонкого конца полюса к толстому. По достижении точкой a точки A увеличение потока прекратится и в последующих сечениях $a'b'$ (в основании полюса) поток будет оставаться постоянным. По такому же закону должно, согласно изложенному в § 1 принципу, изменяться и сечение полюса, поэтому его форма должна иметь вид, представленный на рис. 114.

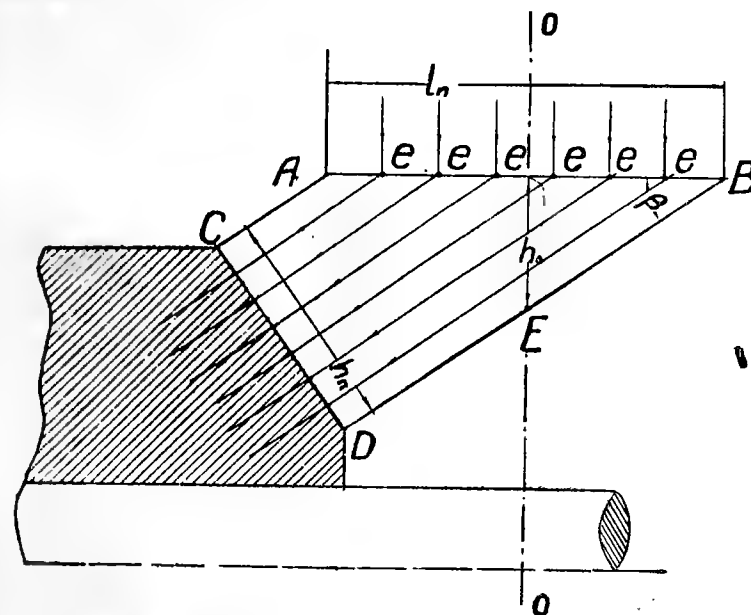


Рис. 114. Оптимальная форма идеального когтеобразного полюса.

При такой конструкции когтеобразный полюс представляет собой тело, приближающееся по своей форме к усеченной четырехгранной призме. Боковые грани этой «призмы» образованы двумя параллельными плоскостями A_1E_1 и A_2E_2 (см. рис. 113) и двумя параллельными коническими поверхностями AC и BD , имеющими общую ось, совпадающую с осью машины (рис. 114). Торцовые грани (основания «призмы») состоят также из соосных круговых поверхностей: нижняя грань CD — конической, а верхняя грань AB — цилиндрической.

Верхняя торцовая грань AB является активной поверхностью полюса и располагается в воздушном зазоре машины. На этой поверхности при переходе магнитного потока из зазора в полюс (в точках e — рис. 114) происходит преломление силовых линий и изменение направления пути потока с радиального (в зазоре) на наклонное, параллельное боковым поверхностям AC и BD . На протяжении дальнейшего пути вдоль полюса поток не меняет своего направления, и поскольку не меняется также и индукция, то поле в рассматриваемом идеализированном полюсе является всюду равномерным. Индукция в любой точке такого полюса

$$B_n = \frac{\Phi_n}{S_n}, \quad (VI-13a)$$

причем

$$\Phi_n = \sigma_n \cdot \Phi, \quad (VI-13b)$$

$$S_n = b_n h_n, \quad (VI-13c)$$

$$h_n = l_n \sin \beta. \quad (VI-13d)$$

В этих формулах (см. также рис. 114)

Φ — полезный поток полюса,

σ_n — коэффициент междуполусного рассеяния,

Φ_n — полный поток полюса,

S_n — сечение основания полюса,

b_n — ширина полюса в тангенциальном направлении,

h_n — толщина полюса,

l_n — длина активной поверхности полюса,

β — угол скоса полюса.

Конструкция полюса, изображенная на рис. 114, с экономической точки зрения является вполне совершенной, так как постоянство индукции в ней обеспечено по всему объему полюса. Таким совершенством не отличается даже наиболее широко распространенная явнополусная конструкция, где индукция оказывается далеко не постоянной и изменяется от сравнительно небольших значений на поверхности полюсного

наконечника до полной величины в нижней части сердечника полюса.

Ввиду своих высоких экономических показателей конструкция, изображенная на рис. 114, может быть принята за некоторый идеальный эталон, с которым следует сравнивать все другие возможные конструктивные формы когтеобразных полюсов. В связи с этим представляет интерес более подробно рассмотреть отдельные элементы такого «идеального» полюса.

Угол скоса полюса β

С точки зрения наибольшей пропускной способности полюса целесообразно, очевидно, угол скоса полюса β выполнять как можно большим, ибо с увеличением угла β возрастают высота полюса h_n и его сечение S_n (см. формулы (VI-13c, d), что, в свою очередь, позволяет повысить поток полюса Φ_n или же при прежнем потоке снизить индукцию в полюсе B_n (формулы (VI-13a)). Однако увеличение угла β оказывается возможным лишь до определенного предела, ограничиваемого конструктивными возможностями когтеобразного ротора. Действительно, если рассмотреть среднее сечение ротора (по линии OO на рис. 108 или 114), то нетрудно заметить, что при заданной ширине полюса b его высоту h_0 можно увеличивать только до определенной величины h_{om} (рис. 115), при которой наступает касание полюсов противоположной полярности в точках E_1 и E_2 . Дальнейшее увеличение высоты h_0 без изменения формы сечения полюса, т. е. без отступления от принятого выше идеального эталона, оказывается конструктивно невозможным.

Величина максимальной высоты полюса h_{om} согласно рис. 115 равна:

$$h_{om} = AE = AO - OE = AO - OE_2 = \frac{D_p}{2} - \frac{D_{om}}{2} = \frac{D_p}{2} - \frac{b_n}{2} \operatorname{cosec} \varphi, \quad (VI-14)$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{2 \cdot 2p} = \frac{\pi}{2p}, \quad (VI-15)$$

D_p — диаметр наружной цилиндрической поверхности ротора,

D_{om} — диаметр внутренних дуг средних сечений полюсов.

Так как согласно рис. 114 угол β и величина h_0 связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2h_0}{l_n}, \quad (VI-16a)$$

то максимально возможная величина угла скоса полюса $\beta_{\max}$ на основании формул (VI-14 и 16a) может быть определена из соотношения

$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = \frac{D_p}{l_n} - \frac{b_n}{l_n} \operatorname{cosec} \varphi. \quad (\text{VI-16})$$

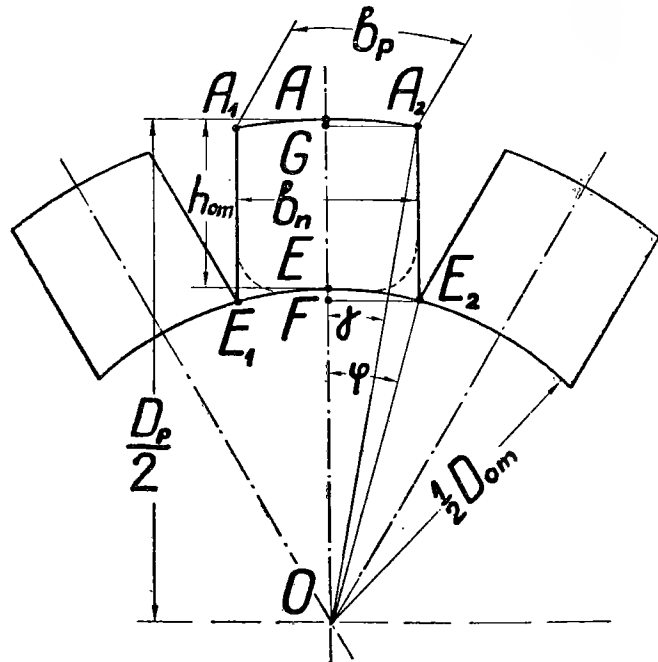


Рис. 115. Конструктивный предел увеличения угла скоса β и ширины полюса b_n .

Выражениям (VI-14 и 16) можно придать более удобный для дальнейшего рассмотрения вид, если обозначить

$$x = \frac{b_n \operatorname{cosec} \varphi}{D_p} = \frac{D_{0m}}{D_p}, \quad (\text{VI-17})$$

$$\lambda_n = \frac{l_n}{D_p}. \quad (\text{VI-18})$$

Тогда вместо (VI-14 и 16) получим:

$$\frac{h_{0m}}{D_p} = \frac{1-x}{2}, \quad (\text{VI-19})$$

$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = \frac{1-x}{\lambda_n}. \quad (\text{VI-20})$$

В выражениях (VI-17—20) величина x представляет собой отношение минимально возможного (по конструктивным соображениям) диаметра D_{0m} к внешнему диаметру ротора D_p . Величина же λ_n является отношением длины полюсов l_n к диаметру ротора D_p .

Следует заметить, что поскольку при максимальном значении угла β происходит взаимное соприкосновение полюсов противоположной полярности, то при этом весьма значительно возрастает поток рассеяния между полюсами, который при когтеобразной конструкции и без того, как известно, получается повышенным. Поэтому в реально выполняемых конструкциях внутренние ребра полюсов (по линии скоса BD — рис. 114) должны быть закругленными (пунктир на рис. 115), что мало изменяя площадь поперечного сечения полюса, способствует значительному снижению потоков рассеяния.

Толщина основания полюса h_n

Толщина полюса в его наибольшем сечении (в основании) определяется формулой (VI-13d). Из этой формулы видно, что толщина полюса h_n увеличивается с ростом угла скоса β и, следовательно, при $\beta = \beta_{\max}$ достигает наибольшего значения, которое согласно (VI-13d и 16) равно:

$$h_{n \max} = \frac{l_p (D_p - b_n \operatorname{cosec} \varphi)}{\sqrt{l_n^2 + (D_p - b_n \operatorname{cosec} \varphi)^2}}. \quad (\text{VI-21a})$$

С учетом обозначений (VI-17 и 18) выражение (VI-21a) можно написать также в виде:

$$\frac{h_{n \max}}{D_p} = \frac{\lambda_n (1-x)}{\sqrt{\lambda_n^2 + (1-x)^2}}. \quad (\text{VI-21})$$

Соответствующая этому значению h_n площадь сечения основания полюса S_n согласно выражениям (VI-13c, 17, 21) будет равна

$$\frac{S_{n \max}}{\frac{1}{4} D_p^2 \sin \varphi} = \frac{4 \lambda_n (1-x) x}{\sqrt{\lambda_n^2 + (1-x)^2}}. \quad (\text{VI-22})$$

Величина $\frac{1}{4} D_p^2 \sin \varphi$ приближенно равна площади сектора, занимаемого в круге ротора одним полюсом. Действительно, с учетом равенства (VI-15) можно написать:

$$\frac{1}{4} D_p^2 \sin \varphi = \frac{1}{4} D_p^2 \cdot \frac{\pi}{2p} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{\pi D_p^2}{4} \cdot \frac{1}{2p} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (\text{VI-22a})$$

Так как при достаточно большом числе полюсов

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad (\text{VI-22b})$$

то

$$\frac{1}{4} D_p^2 \sin \varphi \approx \frac{\pi D_p^2}{4} \cdot \frac{1}{2p}. \quad (\text{VI-22c})$$

Поскольку величина $\frac{\pi D_p^2}{4}$ представляет собой площадь круга ротора диаметром D_p , то правая часть равенства (VI-22c) равна площади сектора, приходящегося на один из полюсов, а формула (VI-22), следовательно, дает величину сечения основания полюса по отношению к площади этого сектора (точнее, к несколько меньшей площади, ибо $\sin \varphi < \varphi$).

Ширина полюса b_n и ее оптимальное значение

Ширину полюса можно, вообще говоря, выбирать обычным образом, исходя из условия получения необходимого полюсного перекрытия, которое согласно рис. 115 равно:

$$\alpha_p = \frac{b_p}{\tau_p} = \frac{D_p}{2} \cdot 2\gamma \frac{2p}{\pi D_p} = \frac{2p}{\pi} \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\varphi}, \quad (\text{VI-23})$$

где γ — угол полюсного перекрытия, связанный с толщиной полюса b_n соотношением

$$\sin \gamma = \frac{A_2 G}{O A_2} = \frac{b_n}{D_p} = x \cdot \sin \varphi. \quad (\text{VI-24})$$

Отсюда, между прочим, видно, что параметр x при достаточно большом числе полюсов (когда углы γ и φ малы) приближенно равен полюсному перекрытию:

$$x = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} \approx \frac{\gamma}{\varphi} = \alpha_p. \quad (\text{VI-24a})$$

Однако если ставить себе целью получение наибольшей пропускной способности коттеобразного полюса, то необходимо подойти к выбору толщины полюса несколько иначе. Рассматривая рис. 115, можно заметить, что площадь сечения полюса в средней плоскости ротора (т. е. сечения $A_1 A_2 E_2 E_1$) стремится к нулю как при уменьшении полюсного перекрытия (когда $b_n \rightarrow 0$), так и при увеличении его, ибо при приближении b_p к высоте полюса $h_{оп}$ стремится к нулю. Отсюда можно сделать вывод, что при некотором среднем значении полюсного перекрытия должен иметь место максимум площади сечения $A_1 A_2 E_2 E_1$.

Аналогичное явление должно, очевидно, иметь место также и для площади сечения основания полюса S_n . Поскольку эта площадь согласно равенству (VI-13a) лимитирует допустимую величину потока полюса Φ_n , т. е. определяет пропускную способность полюса, то выявление условия максимума величины S_n представляет собой важную практическую задачу, правильное решение которой может дать существенное улучшение показателей машины.

Для анализа удобно взять выражение (VI-22). Имея в виду то, что переменная x согласно равенству (VI-17) пропорциональна ширине полюса b_n , можно вместо зависимости от b_n рассматривать зависимость S_n от x . Тогда, вычисляя по общему правилу частную производную от S_n по x , согласно выражению (VI-22) будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_{n \max}}{\frac{1}{4} D^2 \sin \varphi} \right) = 4\lambda_n \cdot \frac{\lambda_n^2 (1-2x) + (1-x)^3}{[\lambda_n^2 + (1-x)^2]^{3/2}}.$$

Приравняв это выражение нулю, найдем условие максимума площади $S_{n \max}$:

$$\frac{(1-x)^3}{2x-1} = \lambda_n^2. \quad (\text{VI-25})$$

Из этого равенства видно, что оптимум величины x , а следовательно, согласно формуле (VI-24a), и полюсного перекрытия $\alpha \approx x$ практически не зависят от числа полюсов и почти полностью определяются относительной длиной полюса λ_n . Кроме того, из выражения (VI-25) нетрудно установить, что поскольку λ_n^2 является существенно положительной величиной, то для выполнения равенства (VI-25) величина x должна лежать в пределах

$$\frac{1}{2} \leq x_{\text{опт}} \leq 1, \quad (\text{VI-25a})$$

ибо в противном случае дробь в левой части равенства (VI-25) будет отрицательной.

Неравенство (VI-25a) показывает, что оптимальное значение полюсного перекрытия оказывается большим 0,5 и стремится к этому значению лишь при больших значениях относительной длины λ_n . Полная кривая зависимости $x_{\text{опт}}$ от λ определяемая формулой (VI-25), показана на рис. 116.

На рис. 117 приведены еще зависимости от λ_n величин угла скоса полюса β и относительной площади сечения основания полюса S_n , получающихся при соблюдении условия (VI-25).

Показанные на этом рисунке значения величин β и S_n являются тем пределом, выше которого вообще невозможно перейти при применении когтеобразного полюса «идеальной» формы (по рис. 114).

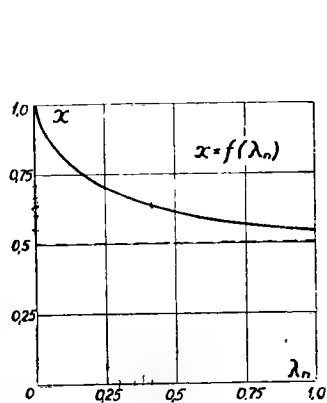


Рис. 116. Оптимальные значения параметра x , обеспечивающие максимум площади сечения основания полюса S_n .

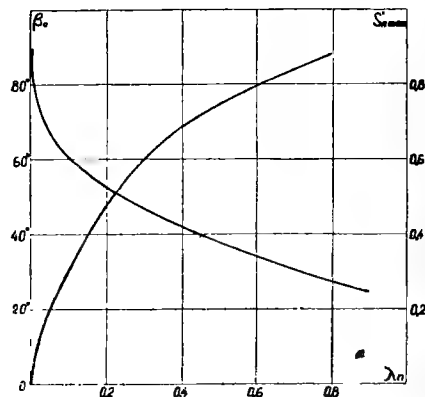


Рис. 117. Угол скоса β и относительная величина площади сечения основания полюса S_n , соответствующих оптимальным значениям параметра x (рис. 116).

Степень использования машины с когтеобразными полюсами «идеальной» формы

В связи с выявлением предельно возможной пропускной способности когтеобразного полюса (рис. 117) представляет интерес выяснить также возможности когтеобразного ротора в смысле обеспечения достаточно высокой индукции в воздушном зазоре и, следовательно, степени использования габаритов машины. Величина индукции в зазоре по известной формуле равна:

$$B_\delta = \frac{\Phi}{\alpha_\delta \tau l_i}, \quad (VI-26a)$$

где α_δ — расчетный коэффициент полюсного перекрытия.

Полезный поток полюса Φ можно выразить через параметры ротора с помощью формул (VI-13a, b и 22):

$$\Phi = \frac{B_n}{\sigma_n} \cdot D_p^2 \sin \varphi \cdot \frac{\lambda_n (1-x) x}{\sqrt{\lambda_n^2 + (1-x)^2}}. \quad (VI-26b)$$

Подставляя выражение (VI-26b) в равенство (VI-26a) и учитывая соотношения (VI-22a, 23 и 24), после небольших преобразований найдем:

$$\frac{B_\delta}{B_n} = \frac{k}{\sigma_n} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{\lambda_n^2 + (1-x)^2}}, \quad (VI-26)$$

где для сокращения обозначено

$$k = \frac{D_p}{D} \cdot \frac{l_n}{l_i} \cdot \frac{\alpha_p}{\alpha_\delta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\gamma}.$$

Каждая из входящих в правую часть этого равенства дробей по величине мало отличается от единицы, но всегда меньше ее. Поэтому коэффициент k должен быть всегда несколько меньше единицы. Величина коэффициента между полюсного рассеяния σ_n , наоборот, всегда больше единицы. Поэтому входящая в правую часть равенства (VI-26) дробь $\frac{k}{\sigma_n}$ является величиной меньше единицы. Что же касается другой дроби

$$y(\lambda_n, x) = \frac{1-x}{\sqrt{\lambda_n^2 + (1-x)^2}}, \quad (VI-27)$$

то она является функцией величин λ_n и x и тоже не может превышать единицы. График функции $y(\lambda_n, x)$ представлен на рис. 118, где, кроме сетки кривых, соответствующих различным постоянным значениям x , приведена также кривая для величины $x = x_{\text{опт}}$, определяемой соотношением (VI-25) и кривой рис. 116.

Обычно полюсные системы когтеобразного ротора изготавливаются из литой или ковальной мягкой стали. В этом случае максимально допустимая индукция в полюсе оказывается равной 14—16 тыс. гс. Индукция в воздушном зазоре B_δ в хорошо использованных машинах небольших мощностей должна лежать в пределах 7—8 тыс. гс. Исходя из этих цифр, можно принять, что для нормального использования стали статора и ротора отношение $\frac{B_\delta}{B_n}$ должно иметь величину порядка 0,5. Если при этом учесть, что величины k и σ_n в формуле (VI-26) могут иметь значения порядка 0,8—0,9 и 1,1—1,5 соответственно, то необходимая величина функции $y(\lambda_n, x)$ согласно формулам (VI-26 и 27) получится равной:

$$y(\lambda_n, x) = \frac{0,5(1,1 \div 1,5)}{0,8 \div 0,9} \approx 0,6 \div 0,9. \quad (VI-27a)$$

Таким образом, для хорошего использования активных материалов машины необходимо, чтобы величина функции $y(\lambda_n, x)$ была не менее 0,6—0,9. Из рис. 118 видно, что это условие при обычно применяемых полюсных перекрытиях по-

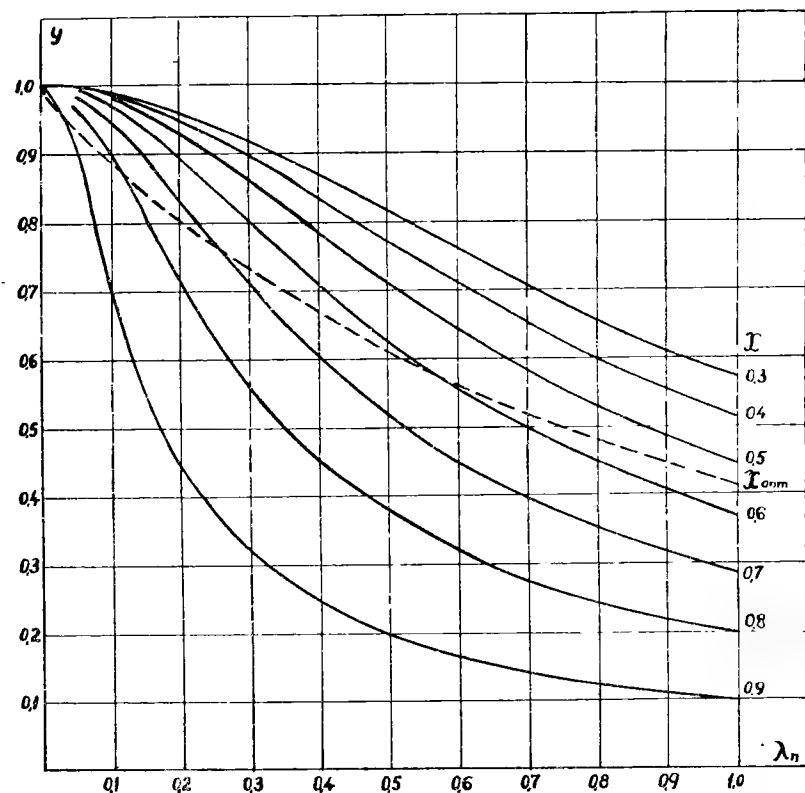


Рис. 118. График функции $y(\lambda_n, x)$, характеризующей отношение индукции в воздушном зазоре B_δ к индукции в основании полюса B_n .

рядка 0,6—0,7, а также при оптимальных значениях x , можно выполнить лишь при достаточно малых относительных длинах машины, не превышающих 0,4—0,5. При больших длинах оказывается невозможным при когтеобразных полюсах «идеальной» формы обеспечить достаточно полное использование активных материалов.

3. КОГТЕОБРАЗНЫЕ ПОЛЮСА С БОЛЬШОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ

Когтеобразный полюс с боковыми скосами

В целях некоторого ослабления недостатка когтеобразных полюсов, иллюстрируемого кривыми рис. 118, целесообразно несколько отступить от «идеальной» формы полюса, представленной на рис. 114. Одним из возможных и в то же время достаточно эффективных способов такого отступления является применение боковых скосов у полюса (рис. 119). Если при этом ширину полюса в среднем сечении машины OO оставить

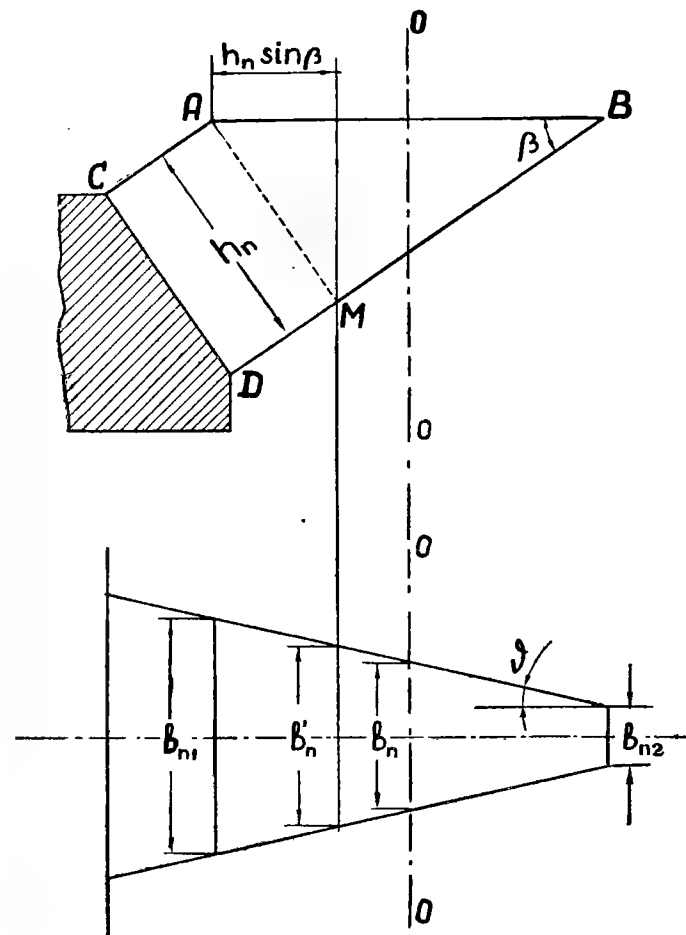


Рис. 119. Когтеобразный полюс с боковыми скосами.

такой же, как и при «идеальной» форме, то картина среднего сечения (см. рис. 115), очевидно, также останется неизменной. Вместе с тем, величина потока, проходящего через среднее сечение $A_1E_1E_2A_2$ (см. рис. 115) значительно уменьшится, так как площадь активной поверхности полюса в его тонкой половине станет меньше, чем при «идеальной» форме. Поэтому при сохранении прежней индукции в зазоре B_δ индукция в среднем сечении полюса будет меньше, чем ранее. Индукция в основании полюса также уменьшится, ибо, несмотря на сохранение полной величины активной поверхности полюса AB (см. рис. 114 и 119) и величины полезного потока полюса Φ , площадь сечения основания полюса значительно повысится за счет увеличения его средней ширины.

Таким образом, применение боковых скосов полюса позволяет значительно увеличить отношение $\frac{B_\delta}{B_n}$ и, следовательно, расширить область применения когтеобразных полюсов в сторону удлинения машин.

Для количественной оценки влияния боковых скосов на свойства когтеобразного полюса удобно исходить из ширины полюса в среднем сечении b и угла бокового скоса ϑ (рис. 119). При этом для максимальной (b_{n1}) и минимальной (b_{n2}) ширины полюса можно, очевидно, написать:

$$\left. \begin{aligned} b_{n1} &= b_n + l_n \cdot \operatorname{tg} \vartheta \\ b_{n2} &= b_n - l_n \cdot \operatorname{tg} \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-28a})$$

Максимальную ширину полюса b_{n1} , очевидно, целесообразно увеличивать лишь до тех пор, пока она не станет равной полюсному делению τ , ибо дальнейшее увеличение b_{n1} будет означать заход в область соседнего полюса противоположной полярности и вызовет уменьшение полезного потока как этого, так и всех других полюсов. Таким образом

$$b_n \leq b_{n1} \leq \tau; \quad b_{n1 \max} = \tau, \quad (\text{VI-28b})$$

и, следовательно, на основании первой формулы (VI-28a)

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\max 1} = \frac{b_{n1 \max} - b_n}{l_n} = \frac{\tau - b_n}{l_n}. \quad (\text{VI-28c})$$

Минимальную ширину полюса b_{n2} можно уменьшать до тех пор, пока она не станет равной нулю; поэтому

$$0 \leq b_{n2} \leq b_n; \quad b_{n2 \min} = 0, \quad (\text{VI-28d})$$

и, следовательно, на основании второго равенства (VI-28a)

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\max 2} = \frac{b_n - b_{n2 \min}}{l_n} = \frac{b_n}{l_n}. \quad (\text{VI-28e})$$

Сравнивая равенства (VI-28c, e), можно заключить, что если $(\tau - b_n) < b_n$, т. е. ширина полюса больше половины полюсного деления $\left(b_n > \frac{\tau}{2}\right)$, то тогда максимально возможное значение угла скоса ϑ определяется формулой (VI-28c), так как неравенство (VI-28d) при этом соблюдается автоматически. В противоположном случае, когда $b_n < \frac{\tau}{2}$, максимальное значение угла ϑ следует определять по формуле (VI-28e). На практике в подавляющем большинстве встречается первый случай; поэтому для дальнейшего можно принять равенство (VI-28c), которое с учетом (VI-15, 17, 18) удобно переписать еще в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\max} = \frac{\varphi - x \cdot \sin \varphi}{\lambda_n}. \quad (\text{VI-28})$$

Сечение основания когтеобразного полюса при наличии боковых скосов представляет собой фигуру, близкую по форме к трапеции. Высота этой трапеции равна толщине полюса h_n , а размеры оснований зависят от положения выбранного сечения и постепенно увеличиваются в направлении от сечения AM к CD .

Наименьшие размеры оснований и, следовательно, наименьшую площадь имеет ближайшее к полюсу сечение AM . Для оснований трапеции этого сечения имеем:

$$\begin{aligned} b_{n1} &= b_n + l_n \cdot \operatorname{tg} \vartheta; \\ b'_{n1} &= b_{n1} - 2h_n \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \vartheta = b_n + (l_n - 2h_n \sin \beta) \cdot \operatorname{tg} \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{VI-29a})$$

Средняя ширина сечения b_{n3} и площадь этого сечения S_n будут соответственно равны:

$$b_{n3} = \frac{b_{n1} + b'_{n1}}{2} = b_n + (l_n - h_n \sin \beta) \cdot \operatorname{tg} \vartheta, \quad (\text{VI-29b})$$

$$S_n = h_n \cdot b_{n3} = b_n h_n + h_n (l_n - h_n \sin \beta) \cdot \operatorname{tg} \vartheta. \quad (\text{VI-29c})$$

Поскольку величина $(l_n - h_n \sin \beta)$ всегда положительна, ибо согласно рис. 119

$$l_n > h_n \sin \beta,$$

то согласно формулам (VI-29b, c)

$$b_{n3} > b_n, \quad S_n > b_n h_n,$$

и, следовательно, при наличии боковых скосов у полюса (когда $\vartheta \neq 0$) площадь сечения его основания S_n действительно увеличивается.

Для количественной оценки увеличения средней ширины

и площади сечения основания полюса удобно отнести величины b_{ns} и S_n к соответствующим значениям «идеального» полюса, т. е. к b_n и $b_n h_n$. При этом вместо равенств (VI-29b, c) будем иметь:

$$\kappa_n = \frac{b_{ns}}{b_n} = \frac{S_n}{b_n h_n} = 1 + \frac{l_n - h_n \sin \beta}{b_n} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \quad (\text{VI-29d})$$

или, с учетом формулы (VI-13d):

$$\kappa_n = 1 + \frac{l_n}{b_n} \cos^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \vartheta. \quad (\text{VI-29e})$$

Из равенств (VI-17 и 18) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{l_n}{b_n} = \frac{\lambda_n}{x \cdot \sin \varphi}. \quad (\text{VI-30})$$

Поэтому вместо выражения (VI-29e) можно также написать:

$$\kappa_n = 1 + \frac{\lambda_n}{x \cdot \sin \varphi} \cdot \cos^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \vartheta. \quad (\text{VI-30a})$$

Если ограничить рассмотрение только такими случаями, когда угол β имеет максимально возможное значение, то согласно равенствам (VI-20 и 30a) получим:

$$\kappa'_n = 1 + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{x \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 + (1-x)^2}. \quad (\text{VI-30b})$$

При максимально возможном угле скоса, определяемом формулой (VI-28), равенство (VI-30a) примет вид:

$$\kappa''_n = 1 + \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{x} - 1 \right) \cos^2 \beta. \quad (\text{VI-30c})$$

Если же максимально возможными являются оба угла скоса β и ϑ , то вместо выражения (VI-30a, b, c) будем иметь:

$$\kappa_{nm} = 1 + \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{x} - 1 \right) \cdot \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 + (1-x)^2}. \quad (\text{VI-30d})$$

График зависимости величины κ_{nm} от λ_n и x при двух значениях угла φ , соответствующих $2p = 4$ и $2p = \infty$, приведен на рис. 120, где, кроме сетки кривых для разных значений x , отложены также кривые для оптимальных его значений, удовлетворяющих условию (VI-25).

График (рис. 120) показывает, что применение боковых скосов контеобразных полюсов может значительно повысить

пропускную способность полюса, причем это повышение получается тем большим, чем длиннее машина (чем больше λ_n) и чем меньше полюсное перекрытие (меньше x). При этом, конечно, соответственно повышается также и отношение $\frac{B_d}{B_n}$, т. е. улучшается использование габаритов машины.

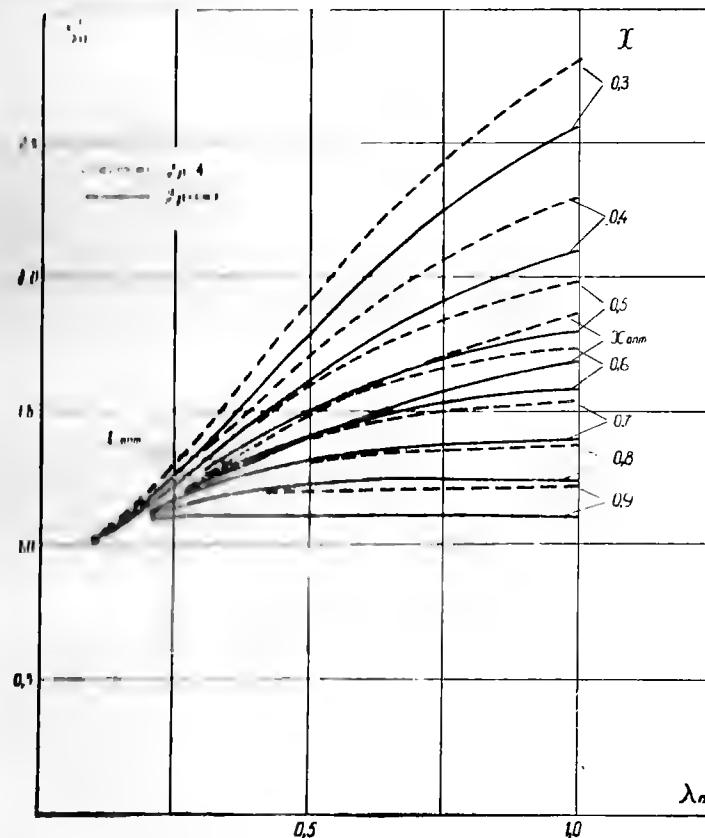


Рис. 120. Степень увеличения площади основания полюса при применении максимального бокового скоса.

Эффект, достигаемый путем применения боковых скосов, получается значительным и, например, при оптимальной величине x и при относительной длине машины λ_n порядка $0,5 \div 0,7$ составляет 40—60%. Это обстоятельство заставляет признать применение боковых скосов весьма полезным меро-

приятием, которое в ряде случаев может значительно расширить возможности применения когтеобразных полюсов в электрических машинах.

Полюса с синусоидальными очертаниями

Применение боковых скосов у когтеобразных полюсов приводит к тому, что активная поверхность полюса принимает вид трапеции (см. рис. 119). Однако вместо трапеции можно использовать и другую близкую к ней фигуру, например, заполнить очертания активной поверхности полюса по синусоиде (рис. 121).

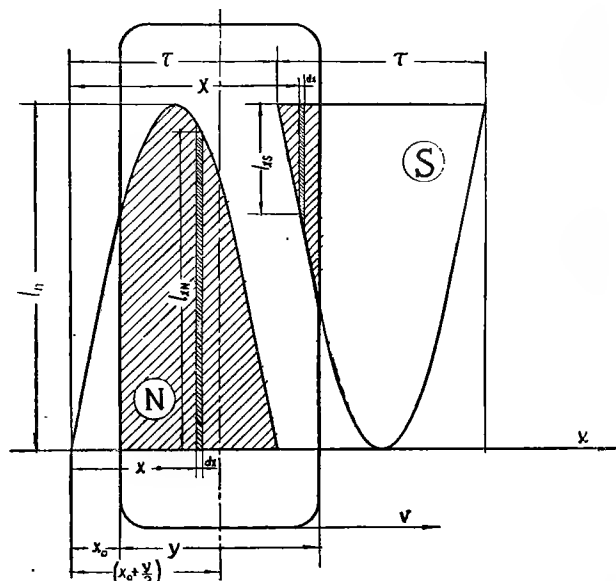


Рис. 121. Когтеобразные полюса с синусоидальными очертаниями.

Синусоидальные полюса, очевидно, сохраняют все преимущества когтеобразных полюсов с боковыми скосами; но, кроме этого, они имеют еще и ряд других положительных свойств.

Одно из важных свойств полюса с очертанием по синусоиде состоит в том, что при его применении кривая э. д. с. холостого хода в любом витке обмотки статора машины оказывается весьма близкой к синусоиде, теоретически — точной синусоидой. Действительно, независимо от того, какой шаг

имеет рассматриваемый виток, для пронизывающего его потока Φ_w можно в общем случае согласно рис. 121 написать:

$$\Phi_w = \int_{x_0}^{\tau} d\Phi_N - \int_{\tau}^{x_0+y} d\Phi_S. \quad (VI-31a)$$

Элементарные потоки $d\Phi_N$ и $d\Phi_S$ при постоянной величине индукции и зазоре B_δ пропорциональны длинам l_{xN} и l_{xS} выбранных элементарных участков (рис. 121):

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_N &= B_\delta l_{xN} dx \\ d\Phi_S &= B_\delta l_{xS} dx \end{aligned} \right\}. \quad (VI-31b)$$

Поскольку очертания полюсов выполнены по синусоидам с амплитудой, равной полной длине полюса l_n , то для длин элементарных участков l_{xN} и l_{xS} будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} l_{xN} &= l_n \cdot \sin \frac{\pi x}{\tau} \\ l_{xS} &= l_n \cdot \sin \frac{\pi(x-\tau)}{\tau} = -l_n \sin \frac{\pi x}{\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (VI-31c)$$

В связи с этим

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\tau} d\Phi_N &= B_\delta l_n \int_{x_0}^{\tau} \sin \frac{\pi x}{\tau} dx = \frac{\tau l_n B_\delta}{\pi} \left[1 + \cos \frac{\pi x_0}{\tau} \right], \\ \int_{\tau}^{x_0+y} d\Phi_S &= B_\delta l_n \int_{\tau}^{x_0+y} -\sin \frac{\pi x}{\tau} dx = \frac{\tau l_n B_\delta}{\pi} \left[1 + \cos \frac{\pi(x_0+y)}{\tau} \right], \end{aligned}$$

и, следовательно, равенство (VI-31a) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_w &= \frac{\tau l_n B_\delta}{\pi} \left[\cos \frac{\pi x_0}{\tau} - \cos \frac{\pi(x_0+y)}{\tau} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \tau l_n B_\delta \cdot \sin \frac{\pi y}{2\tau} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} \left(x_0 + \frac{y}{2} \right). \end{aligned} \quad (VI-31d)$$

В этом выражении все величины являются постоянными, за исключением координаты центра витка $\left(x_0 + \frac{y}{2} \right)$, которая при вращении ротора машины с постоянной окружной скоростью v изменяется пропорционально времени t :

$$\left(x_0 + \frac{y}{2} \right) = vt. \quad (VI-32a)$$

Для окружной скорости можно написать следующие равенства:

$$v = \Omega \cdot \frac{D_p}{2} = \Omega \cdot \frac{2p\tau}{2\pi} = \frac{\omega\tau}{\pi}, \quad (\text{VI-32a})$$

где Ω — угловая скорость вращения ротора,
 ω — угловая частота э. д. с. и токов, индуцируемых в статоре.

Подставляя выражения (VI-32a, b) в формулу (VI-31d) и обозначая, кроме того,

$$\Phi_{wm} = \frac{2}{\pi} \tau l_n B_g \cdot \sin \frac{\pi y}{2\tau}, \quad (\text{VI-32c})$$

вместо (VI-31d) получим окончательно:

$$\Phi_w = \Phi_{wm} \cdot \sin \omega t. \quad (\text{VI-32})$$

Таким образом, поток витка, а следовательно, и э. д. с. в нем оказывается чисто синусоидальной функцией времени. Такое свойство рассматриваемого полюса представляется весьма ценным, ибо, как известно [55], при обычной явнополюсной конструкции машины, а также и при других конструкциях получить чисто синусоидальную э. д. с. холостого хода витка практически невозможно.

Пропускная способность синусоидальных полюсов

Для выяснения пропускной способности полюса с синусоидальными очертаниями необходимо определить его площадь сечения в наиболее нагруженной части полюса, где величина полезного потока уже достигла своего полного значения, а потока рассеяния также в основном вошли в полюс. Таким местом можно считать сечение AE (рис. 122), начинающееся на линии A_1A_2 перехода активной поверхности полюса AB в торцовую поверхность AC и располагающееся перпендикулярно к другой торцовой поверхности BD .

Поскольку поверхность BD является обычно конусом с вершиной O_1 , лежащей на оси машины, то для обеспечения перпендикулярности AE к BD поверхность AE должна быть также конической с вершиной O_2 на оси машины.

При таком предположении искомое сечение полюса S_n будет представлять собой некоторую часть поверхности конуса O_2A , вырезанную из него боковыми поверхностями полюса A_1B и A_2B . Поскольку коническая поверхность может быть, как известно, развернута в плоскость, то для вычисления величины сечения S_n проще всего воспользоваться раз-

верткой конуса O_2A . Эта развертка приведена на рис. 123, откуда видно, что, будучи развернутым на плоскости, рассматриваемое сечение полюса S_n оказывается ограниченным двумя дугами A_1A_2 и E_1E_2 concentрических окружностей с радиусами O_2A и O_2E и двумя более сложными кривыми A_1E_1 и A_2E_2 , форма которых определяется боковыми очертаниями полюса

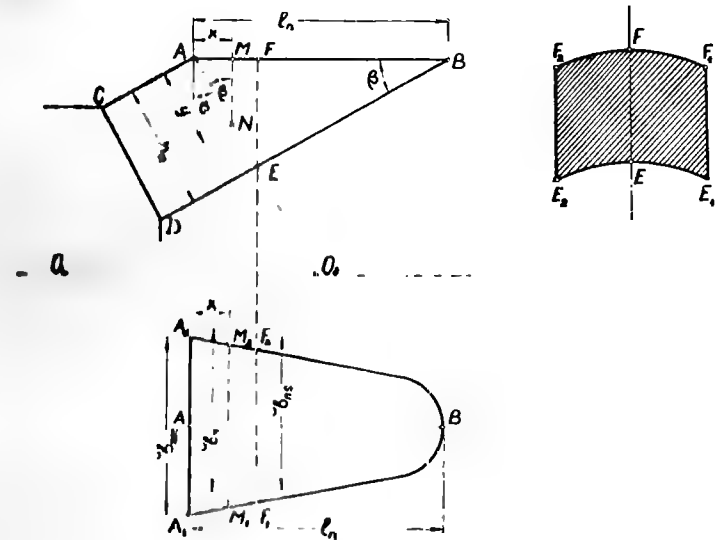


Рис. 122. К определению пропускной способности полюса с синусоидальными очертаниями.

боковые поверхности полюса имеют обычно цилиндрический характер и образуются путем перемещения некоторой прямой линии (образующей) вдоль синусоидального контура (направляющей) A_1BA_2 (рис. 122), причем таким образом, что эта прямая все время сохраняет вертикальное направление (например, F_1E_1 , F_2E_2 — рис. 122) и, кроме того, параллельна средней плоскости симметрии полюса FE . Образующую при этом дугу конуса $\cup E_2E_1$ можно по длине приближенно считать равной дуге активной поверхности $\cup F_2F_1$:

$$\cup E_2E_1 \approx \cup F_2F_1, \quad (\text{VI-33a})$$

и тогда при вычислении произвольной дуги $\cup N_1N_2$ сечения $A_1A_2E_2E_1$ (рис. 123) можно также положить ее равной соответствующей дуге $\cup M_1M$ на активной поверхности полюса:

$$\cup N_1N_2 \approx \cup M_1M_2. \quad (\text{VI-33b})$$

Получающаяся при этом неточность уменьшается по мере приближения линии N_1N_2 к A_1A_2 и становится равной нулю, когда N_1N_2 совпадает с A_1A_2 .

Ввиду синусоидального характера очертаний полюса между величиной произвольной дуги $\frown M_1M_2 = \frown b_n$ и ее расстоянием x от основания синусоиды $\frown A_1A_2 = \frown b_{nm}$ согласно рис. 122, должна иметь место следующая зависимость:

$$x = l_n \cos \left(\frac{\frown b_n}{\frown b_{nm}} \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad (\text{VI-33c})$$

где $l_n = AB$ представляет собой длину полюса (амплитуду синусоиды).

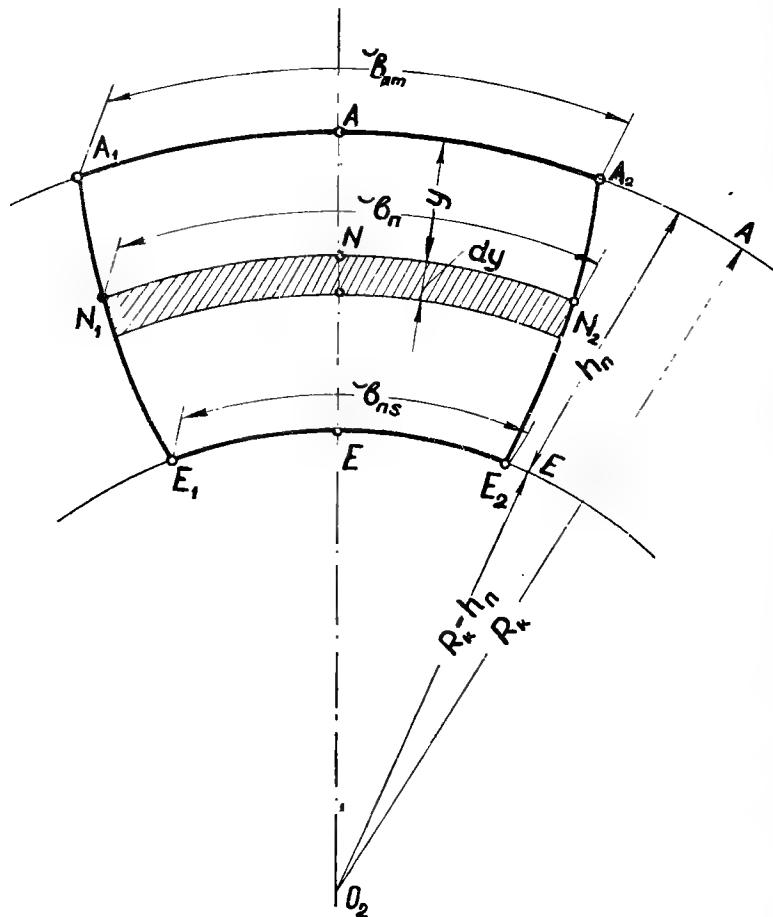


Рис. 123. К вычислению сечения полюса S_n .

Разрешая равенство (VI-33c) относительно дуги $\frown b_n$, найдем:

$$\frown b_n = \frac{2}{\pi} \frown b_{nm} \cdot \arccos \frac{x}{l_n}. \quad (\text{VI-33})$$

При рассмотрении сечения $A_1A_2E_2E_1$ на рис. 123 необходимо вместо координаты x ввести расстояние по образующей конуса $AN = y$. Согласно рис. 122 между величинами x и y имеет место простая зависимость

$$x = y \sin \beta. \quad (\text{VI-34a})$$

Максимальное значение координаты y равно высоте h_n сечения $A_1A_2E_2E_1$, которая согласно рис. 122 равна:

$$h_n = l_n \sin \beta. \quad (\text{VI-34b})$$

Используя равенства (VI-34a и b), выражение (VI-33) можно привести к виду:

$$\frown b_n = \frac{2}{\pi} \frown b_{nm} \arccos \left(\frac{y}{h_n} \sin^2 \beta \right). \quad (\text{VI-34})$$

Для определения величины сечения $A_1A_2E_2E_1$ теперь достаточно проинтегрировать выражение (VI-34) по y в пределах от 0 до h_n . В результате интегрирования будем иметь:

$$S_n = \int_0^{h_n} \frown b_n(y) dy = \frac{2}{\pi} \frown b_{nm} \int_0^{h_n} \arccos \left(\frac{\sin^2 \beta}{h_n} \cdot y \right) dy = \\ = \frac{2}{\pi} \frown b_{nm} h_n \left[\arccos (\sin^2 \beta) + \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^4 \beta}}{\sin^2 \beta} \right]. \quad (\text{VI-35})$$

Представляет интерес сравнение величины S_n с величиной площади S активной поверхности полюса A_2BA_1 , которая согласно рис. 122 равна:

$$S = \frac{2}{\pi} \frown b_{nm} l_n. \quad (\text{VI-36a})$$

Относя величину S_n к S и используя равенства (VI-35, 36a и 34b), получим окончательно:

$$\kappa_n = \frac{S_n}{S} = \sin \beta \cdot \arccos (\sin^2 \beta) + \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^4 \beta}}{\sin \beta}. \quad (\text{VI-36})$$

Из этого выражения видно, что относительная величина площади сечения полюса κ_n зависит только от одного параметра — от угла скоса полюса β . Эта зависимость представ-

лена на рис. 124, из которого следует, что по мере увеличения угла скоса β относительное сечение полюса сначала быстро возрастает, достигает значений, несколько больших единицы, а затем немного уменьшается, стремясь к единице при $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Из рис. 124 видно, что при значениях угла β , больших 55° , величина α_n оказывается большей или равной единице. Это обстоятельство является весьма важной особенностью синусоидальных полюсов, ибо такого явления, когда площадь полюсного сердечника была бы больше площади активной поверхности полюсного наконечника, не имеется ни в какой другой конструкции синхронной машины. Из этого факта следует, что индуктор с синусоидальными полюсами обладает, вообще говоря, значительно большими возможностями в смысле получения высокой пропускной способности, нежели любая другая конструкция индуктора. Действительно, поскольку площади S и S_n согласно зависимости (VI-36) и (рис. 124) могут быть равны, то при отсутствии рассеяния могли бы быть равны и соответствующие индукции. Но поскольку в сечении S_n допускаемая индукция может составлять 14—16 тыс. гс, то индукция в зазоре могла бы тоже достигать этих значений. С учетом наличия междуполюсного рассеяния эти цифры несколько снизятся, однако практически не составит особого труда получить индукцию в зазоре порядка 10—12 тыс. гс. Такие высокие значения B_z при других конструкциях индуктора получить почти невозможно, поэтому можно констатировать, что применение синусоидальных полюсов может весьма значительно повысить пропускную способность индуктора и использование габаритов машины.

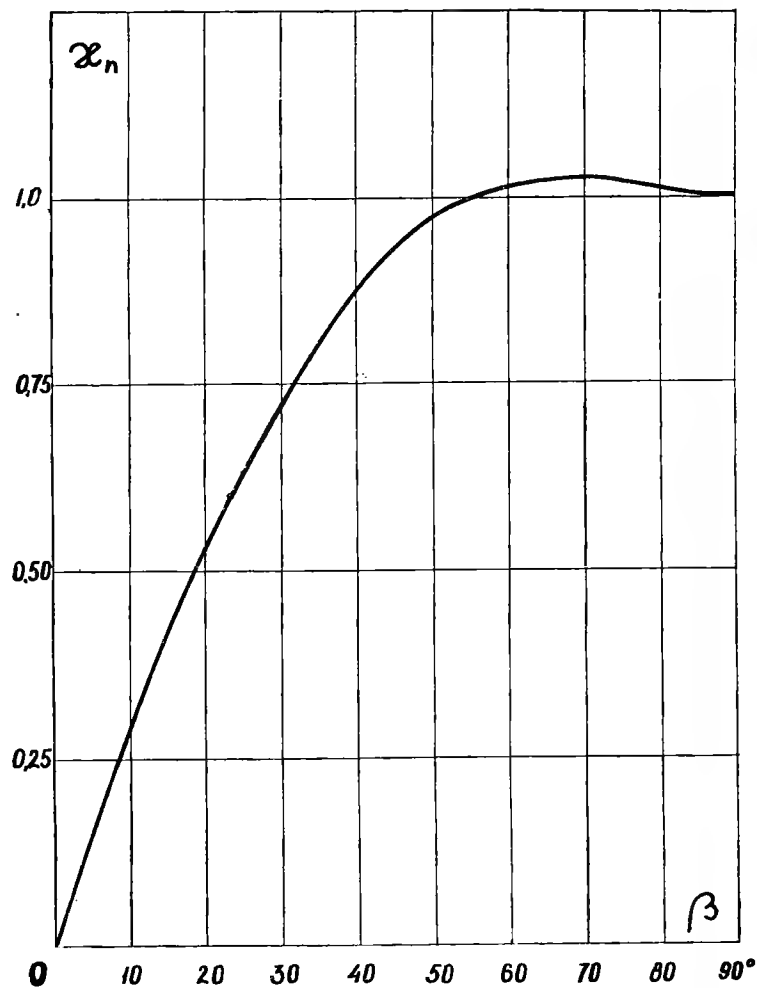


Рис. 124. Зависимость относительной величины площади сечения синусоидального полюса от угла скоса β .

соидальных полюсов, ибо такого явления, когда площадь полюсного сердечника была бы больше площади активной поверхности полюсного наконечника, не имеется ни в какой другой конструкции синхронной машины. Из этого факта следует, что индуктор с синусоидальными полюсами обладает, вообще говоря, значительно большими возможностями в смысле получения высокой пропускной способности, нежели любая другая конструкция индуктора. Действительно, поскольку площади S и S_n согласно зависимости (VI-36) и (рис. 124) могут быть равны, то при отсутствии рассеяния могли бы быть равны и соответствующие индукции. Но поскольку в сечении S_n допускаемая индукция может составлять 14—16 тыс. гс, то индукция в зазоре могла бы тоже достигать этих значений. С учетом наличия междуполюсного рассеяния эти цифры несколько снизятся, однако практически не составит особого труда получить индукцию в зазоре порядка 10—12 тыс. гс. Такие высокие значения B_z при других конструкциях индуктора получить почти невозможно, поэтому можно констатировать, что применение синусоидальных полюсов может весьма значительно повысить пропускную способность индуктора и использование габаритов машины.

Выводы

Изложенное в настоящей главе позволяет сделать следующие выводы.

1. Основным существенно необходимым свойством когтеобразного полюса является его несимметричность относительно средней плоскости пакета статора. Другие условия, касающиеся формы и размеров полюсной системы, относятся, по существу, к экономическим качествам конструкции.

2. Для оценки экономических качеств любой магнитной цепи можно использовать понятие добротности магнитопровода. Величина добротности, определяемая формулами (VI-1 и 8), не зависит от габаритов магнитопровода и может изменяться от 0 (отсутствие магнитопроводящих свойств) до 1 (максимальная добротность).

3. В целях достижения максимальной добротности магнитопровода следует выполнять его таким образом, чтобы магнитная индукция во всех его точках была одинаковой. Отклонение от этого принципа может вызвать существенное снижение добротности, особенно заметное при значительных насыщениях материала магнитопровода.

4. Среди многообразия различных конструктивных форм когтеобразных полюсов наиболее целесообразной с экономическими

ческой точки зрения является «идеальная» форма, близкая к усеченной четырехгранной призме (см. рис. 114).

5. Для «идеальной» формы полюса характерно наличие максимального угла скоса $\beta_{\max}$ и оптимального полюсного перекрытия, оцениваемого параметром $x_{\text{опт}}$ (см. рис. 116). При выполнении обоих этих условий пропускная способность полюса оказывается максимально возможной.

6. При применении коттеобразных полюсов «идеальной» формы в ряде случаев, в особенности в относительно длинных машинах, может иметь место недостаточно высокое использование габаритов машины. Эффективным средством ослабления этого недостатка является применение боковых скосов полюса.

7. Наиболее целесообразным для практического применения вариантом коттеобразного полюса является, по-видимому, конструкция с синусоидальными очертаниями активной поверхности, которая, помимо высокой пропускной способности полюса, обеспечивает еще и синусоидальную форму кривой э. д. с. машины.

8. Площадь сечения полюса с синусоидальными очертаниями оказывается весьма значительной и при известных условиях может быть равной площади активной поверхности полюса. В связи с этим пропускная способность синусоидальных полюсов может быть более высокой, чем в обычной явнополюсной конструкции. Это дает возможность достичь весьма высоких значений индукции в зазоре — до 10—12 тыс. гс — и получить при этом высокое использование материалов и габаритов машины.

9. Применение синусоидальных полюсов в сочетании с другими мероприятиями позволяет создать бесконтактную конструкцию синхронной машины, которая по своим весовым и другим показателям оказывается на достаточно высоком уровне, не уступая обычным синхронным машинам серийного выпуска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bericht über die internationale elektrische Ausstellung in Wien, 1883. Wien 1885.
2. J. D. Gibbs an. E. Fesquet. Patent No. 238, Jan. 5. «Improvements in alternate current dynamo electric machines».
3. Offizieller Bericht über die internationale elektrotechnische Ausstellung in Frankfurt am Main, 1891. Bd. 1, 1893.
4. M. Dolivo-Dobrovolsky. Dreh- und Wechselstrommaschinen der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft (Vortrag). ETZ, 1895, H. 6, 95.
5. J. Teichmüller. Die elektrische Ausstellung in Karlsruhe. ETZ, 1896, H. 6, 91.
6. A. Holzt. Die Schule des Elektrotechnikers. Bd. II. Leipzig, Verlag von M. Schafer, 1896—1897.
7. Patentschrift № 97381. Wechselstrommaschine mit doppeltem Inductorrad. (Union Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin.) 5 November 1897.
8. M. Dolivo-Dobrovolsky. Aus der Geschichte des Drehstromes ETZ, 1917, H. 28, 368.
9. Справочная книга для электротехников (СЭТ), т. V. Изд. «Кубуч», 1934.
10. А. С. Кантер. Новые идеи в автотракторном электрооборудовании. «Электричество», 1936, № 9, 33.
11. А. Г. Носицын, Д. В. Свечарник. Авторское свидетельство № 56432, 31 января 1940 г.
12. А. Г. Носицын, Д. В. Свечарник. Бесконтактные сельсины ВЭИ. «Бюллетень ВЭИ», 1940, № 2, 19.
13. А. И. Ларионов. Возбуждение генераторов повышенной частоты постоянными магнитами. «Электричество», 1940, № 1, 24.
14. A. L. Embry. Selenium power rectifiers for A. C. aircraft systems. «Electrical Engineering», 1945, № 8.
15. F. A. Annet. Magnetic drives. «Power», 1946, № 2.
16. S. F. Stewart. Automotive and aircraft electrical equipment SAE Journal, vol. 54, No. 3 March 1946, 24.
17. A novel rectified alternating current 6 and 12 volt power system «Electrical Manufacturing», vol. 39, May 1947, No. 5, 104.
18. J. B. Winter. Design features of eddy current variable speed slip couplings. «Electrical Manufacturing», 1947, No. 5.
19. А. С. Кантер. Установка двойного тока. «Электричество», 1947, № 6, 35.
20. J. B. Winter. Electric eddy current machinery. «Electrical Engineering», 1947, No. 7, 643.
21. A. D. Gilchrist. An A—C vehicle generating system. «Electrical Engineering», vol. 66, August 1947, 779.
22. Н. К. Архангельский. Электромагнитные муфты скольжения. «Энергетический бюллетень», 1948, № 2, 19.

23. Н. К. Архангельский. Электромагнитные муфты скольжения и их применение в буровых станках. «Энергетический бюллетень», 1948, № 4, 15.

24. G. Ramsey. Selenium rectifiers in motor vehicle power systems. «AIEE Transactions», vol. 68, 1949, part 1, 149.

25. В. И. Шаховцев, М. Л. Фрезинский. Переменный ток на автомобилях и тракторах. «Автомобильная и тракторная промышленность», 1950, № 10, 16.

26. А. А. Свириденко, М. М. Красношапка, В. В. Винокуров. Расчет электрических машин переменного тока повышенной частоты. Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1951.

27. Г. И. Штурман, В. В. Апсит, А. Ф. Крögerис. Электрические машины в системах электроснабжения железнодорожных вагонов. «Известия АН Латв. ССР», 1952, № 3, 93.

28. Г. И. Штурман. Генераторы с переменной скоростью вращения для выпрямительной нагрузки. Сб. «Вопросы энергетики», вып. I. Изд. АН Латв. ССР, 1952, 85.

29. А. И. Курило, М. Л. Фрезинский. Автобусные генераторные установки переменного тока. «Автомобильная и тракторная промышленность», 1952, № 8 (вкладка).

30. М. Л. Фрезинский. Применение переменного тока в электрооборудовании автомобилей. Сб. «Исследование работы автомобильного электрооборудования», вып. I. Машгиз, 1952.

31. Л. Лопатин, С. Маршак, В. Андреев. Применение генераторов переменного тока на автобусах ЗИС-155. «Автомобильный транспорт», 1953, № 1, 13.

32. A. H. Hoffer, G. W. Weber. An axle-driven alternator-rectifier system for caboose power supply. «Transactions of the AIEE», 1953, 133.

33. В. Н. Акимов, М. Л. Фрезинский. О развитии автотракторного электрооборудования переменного тока. «Автомобильная и тракторная промышленность», 1955, № 1, 9.

34. Э. А. Якубайтис. Системы электроснабжения пассажирского железнодорожного вагона постоянным током. «Известия АН Латв. ССР», 1955, № 3, 107.

35. Г. И. Штурман. Синхронные генераторы в системах автономного электроснабжения пассажирских железнодорожных вагонов. Сб. «Вопросы энергетики», вып. III. Изд. АН Латв. ССР, 1955, 5.

36. В. В. Апсит. Многофазная синхронная машина без скользящих контактов. «Известия АН Латв. ССР», 1955, № 6, 99.

37. В. В. Апсит. Синхронный генератор для электропитания пассажирских вагонов. Диссертация. Рига 1955.

38. G. Hagedorn. Wechseipol-Synchronmaschine mit Wicklungsfreiem Laufer und elektromagnetischer oder permanenter Erregung im Ständer. «AEG-Mitteilungen», Bd. 46, 1956, Heft 11/12, 355.

39. В. С. Шаров. Электромагнитная муфта скольжения с клювообразными полюсами. Труды МЭИ, вып. XVI, 1956, 149.

40. Г. И. Штурман, Э. А. Якубайтис, А. Ф. Крögerис, В. В. Апсит. Новая система автономного электроснабжения пассажирских железнодорожных вагонов. «Электричество», 1957, № 3, 39.

41. Н. И. Кузнецов. Электромагнитная муфта скольжения в экскаваторном приводе. «Электричество», 1957, № 3, 68.

42. В. В. Апсит. Особенности магнитной цепи синхронной машины без скользящих контактов. «Известия АН Латв. ССР», 1957, № 4, 107.

43. М. Л. Фрезинский, А. В. Дроздов. Генераторные установки переменного тока автобусов ЗИЛ-155 и ЗИЛ-127. Автотрансиздат, 1957.

44. В. И. Туманов, И. И. Муратов. Экспериментальное исследование синхронного двигателя с внешнемкнутым магнитным потоком. «Вестник электропромышленности», 1958, № 3, 30.

45. The «Varislip» Motor. «El. Review», vol. 162, May 1958, No. 18, 848.

46. Л. М. Паластин, А. И. Чесноков. Регулируемый синхронный генератор с постоянным магнитом. «Вестник электропромышленности», 1958, № 12, 15.

47. В. С. Шаров. Электромагнитные муфты скольжения. Госэнергиздат, 1958.

48. В. В. Апсит. Некоторые вопросы проектирования синхронных машин с клювообразными полюсами. Сб. «Системы электроснабжения транспортных средств». Изд. АН Латв. ССР, Рига 1958, 21.

49. В. И. Василевский. Генераторы переменного тока для автобусов, грузовых и легковых автомобилей. Сб. «Системы электроснабжения транспортных средств». Изд. АН Латв. ССР, Рига 1958, 59.

50. Е. С. Кастер, Л. Г. Вольпер. Исследования заводских образцов генераторов переменного тока для электроснабжения пассажирских вагонов. Сб. «Системы электроснабжения транспортных средств». Изд. АН Латв. ССР, Рига 1958, 79.

51. В. В. Апсит. Бесконтактная синхронная машина с иглообразными полюсами. «Народное хозяйство Советской Латвии», 1959, № 2, 40.

52. А. Ф. Крögerис, Я. К. Шипка. Бесконтактный генератор постоянного тока. «Народное хозяйство Советской Латвии», 1959, № 4.

53. В. М. Куцевалов. Асинхронные и синхронные электродвигатели с массивными роторами. Диссертация. Рига 1959.

54. Н. И. Кузнецов. Испытания и эксплуатация электромуфт скольжения. Госэнергоиздат, 1959.

55. Р. Рихтер. Электрические машины, т. I. ОНТИ, 1935.

56. И. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, М. 1951.

57. К. М. Поливанов. Физические основы электротехники. Госэнергоиздат, 1950.

58. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

59. Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз. Функции Бесселя и их применение к физике и механике. ИЛ, М. 1953.

60. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. ГИТТЛ, 1949.

61. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1952.

62. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функции комплексного переменного. Гостехиздат, 1951.

63. «SAE Journal», May 1958, 158.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$

В результате умножения на величину $\frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$ и интегрирования по ϑ в пределах от ϑ_0 до $\vartheta_0 + T$ уравнение (III-11) примет вид:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \left[\mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \mu_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta = 0. \quad (\text{PI-1})$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, проинтегрируем почленно. Имея в виду взаимную независимость переменных r, ϑ, z и используя второе равенство (III-18a), для первого и третьего членов выражения (PI-1) получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta = \\ &= \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right) = \\ &= \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right] \right) = \\ &= \mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right), \quad (\text{PI-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \mu_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta = \\ &= \mu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right] = \mu_z \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}. \quad (\text{PI-3}) \end{aligned}$$

При интегрировании второго члена выражения (PI-1) воспользуемся правилом интегрирования по частям и заметим, что в силу периодичности величины $u(r, \vartheta, z)$ и ее производной $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = -H_\vartheta = -\frac{1}{\mu_\vartheta} B_\vartheta$ следует считать

$$u|_{\vartheta_0+T} = u|_{\vartheta_0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta_0+T} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta_0}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\cos \frac{2n\pi(\vartheta_0+T)}{T} = \cos \frac{2n\pi\vartheta_0}{T} \quad \text{и} \quad \sin \frac{2n\pi(\vartheta_0+T)}{T} = \sin \frac{2n\pi\vartheta_0}{T}.$$

Учитывая все это, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta = \\ &= \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta = \\ &= \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2}{T} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \left[-\frac{2n\pi}{T} \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] d\vartheta \right\} = \\ &= \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \frac{2}{T} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2n\pi}{T} \left(\left[u \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u \frac{2n\pi}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right) \right\} = \\ &= \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \frac{2}{T} \left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta_0+T} \cdot \cos \frac{2n\pi(\vartheta_0+T)}{T} - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta_0} \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta_0}{T} \Big] + \\ &+ \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \frac{2}{T} \cdot \frac{2n\pi}{T} \left[u|_{\vartheta_0+T} \cdot \sin \frac{2n\pi(\vartheta_0+T)}{T} - u|_{\vartheta_0} \cdot \sin \frac{2n\pi\vartheta_0}{T} \right] - \\ & \quad - \mu_\vartheta \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{2n\pi}{T} \right)^2 \left[\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right] = \end{aligned}$$

$$= 0 + 0 - \mu_{\vartheta} \frac{1}{r^2} \left(\frac{2n\pi}{T} \right)^2 \cdot u_n = - \mu_{\vartheta} \frac{N_n^2}{r^2} u_n \quad (\text{П1-4})$$

где

$$N_n = \frac{2n\pi}{T}. \quad (\text{П1-5})$$

Подставляя результаты (П1-2, 3 и 4) в уравнение (П1-1), получим искомое уравнение для $u_n(r, z)$:

$$\mu_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right) + \mu_z \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \mu_{\vartheta} \frac{N_n^2}{r^2} u_n = 0. \quad (\text{П1-6})$$

Аналогично изложенному выше, после умножения уравнения (П1-11) на величину $\frac{2}{T} \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$ и интегрирования по ϑ в пределах от ϑ_0 до $\vartheta_0 + T$ получим уравнение для $v_n(r, z)$:

$$\mu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) + \mu_z \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} - \mu_{\vartheta} \frac{N_n^2}{r^2} v_n = 0. \quad (\text{П1-7})$$

Уравнения (П1-6 и 7) справедливы, очевидно, для любых целых значений параметра n , а уравнение (П1-6) — также и для $n=0$. Следовательно, эти уравнения позволяют определить все функции $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$, входящие в ряд Фурье (П1-18).

Приложение 2

ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$

Все четыре граничных условия (П1-16) имеют один и тот же вид, который можно охарактеризовать равенством

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=A} = - \frac{1}{\mu_x} f(\vartheta, y). \quad (\text{П2-1})$$

Умножим это равенство на величину $\frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ в пределах от ϑ_0 до $\vartheta_0 + T$. Имея в виду взаимную независимость переменных ϑ , x , y и используя второе равенство (3-18a), получим:

а) для левой части равенства (П2-1)

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=A} \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta =$$

$$= \left[\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right]_{x=A} =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} u \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right) \right]_{x=A} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} u_n \right]_{x=A} = \frac{\partial u_n}{\partial x} \Big|_{x=A}; \quad (\text{П2-2})$$

б) для правой части равенства (П2-1)

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} - \frac{1}{\mu_x} \cdot f(\vartheta, y) \cdot \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta =$$

$$= - \frac{1}{\mu_x} \left[\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} f(\vartheta, y) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \right] = - \frac{1}{\mu_x} \cdot \varphi_n(y), \quad (\text{П2-3})$$

где

$$\varphi_n(y) = \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} f(\vartheta, y) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П2-4})$$

Подставляя результаты (П2-2 и 3) в равенство (П2-1), получим общую формулу граничных условий для $u_n(r, z)$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} \Big|_{x=A} = - \frac{1}{\mu_x} \varphi_n(y). \quad (\text{П2-5})$$

Аналогично изложенному, после умножения равенства (П2-1) на величину $\frac{2}{T} \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta$ и интегрирования по ϑ в пределах от ϑ_0 до $\vartheta_0 + T$ получим формулу граничных условий для $v_n(r, z)$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} \Big|_{x=A} = - \frac{1}{\mu_x} \chi_n(y), \quad (\text{П2-6})$$

где

$$\chi_n(y) = \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} f(\vartheta, y) \cdot \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П2-7})$$

Сравнивая равенства (П2-4 и 7) с соотношениями (III-18a) и учитывая выражение (III-18), нетрудно заметить, что величины $\varphi_n(y)$ и $\chi_n(y)$ являются коэффициентами разложения функции $f(\vartheta, y)$ в ряд Фурье по переменной ϑ :

$$f(\vartheta, y) = \frac{1}{2} \varphi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n(y) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \chi_n(y) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right]. \quad (\text{П2-8})$$

В соответствии с граничными условиями (III-16) будем теперь в полученных выше формулах последовательно полагать $x=r$ или $x=z$; $A=r_1, r_2, z_1$ или z_2 ; $y=z$ или r ; $f(\vartheta, y) = b_{r1}(\vartheta, z), b_{r2}(\vartheta, z), b_{z1}(r, \vartheta)$ или $b_{z2}(r, \vartheta)$. Тогда получим следующие граничные условия для $u_n(r, z)$ и $v_n(r, z)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} \varphi_{1n}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= -\frac{1}{\mu_z} \psi_{1n}(r) \\ \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} \varphi_{2n}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= -\frac{1}{\mu_z} \psi_{2n}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П2-9})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\mu_r} \chi_{1n}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= -\frac{1}{\mu_z} \omega_{1n}(r) \\ \frac{\partial v_n}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\mu_r} \chi_{2n}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= -\frac{1}{\mu_z} \omega_{2n}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П2-10})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1n}(z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{1r}(\vartheta, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \varphi_{2n}(z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2r}(\vartheta, z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \chi_{1n}(z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{1r}(\vartheta, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \chi_{2n}(z) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2r}(\vartheta, z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \psi_{1n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{1z}(r, \vartheta) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \psi_{2n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2z}(r, \vartheta) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \omega_{1n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{1z}(r, \vartheta) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \omega_{2n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2z}(r, \vartheta) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П2-11})$$

$$\begin{aligned} \psi_{2n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2z}(r, \vartheta) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \omega_{1n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{1z}(r, \vartheta) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \\ \omega_{2n}(r) &= \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+T} b_{2z}(r, \vartheta) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta \end{aligned}$$

причем согласно формуле (П2-8) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} b_{1r}(\vartheta, z) &= \frac{1}{2} \varphi_{10}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{1n}(z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \chi_{1n}(z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] \\ b_{2r}(\vartheta, z) &= \frac{1}{2} \varphi_{20}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{2n}(z) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \chi_{2n}(z) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] \\ b_{1z}(r, \vartheta) &= \frac{1}{2} \psi_{10}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n}(r) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \omega_{1n}(r) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] \\ b_{2z}(r, \vartheta) &= \frac{1}{2} \psi_{20}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{2n}(r) \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} + \omega_{2n}(r) \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2-12})$$

Приложение 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО ПЕРЕМЕННОЙ z ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (III-19a, 20a)

Согласно определению собственные функции должны удовлетворять дифференциальному уравнению, полученному путем выделения из дифференциального уравнения данной

краевой задачи членов, зависящих только от одной выбранной переменной, замены в этих членах неизвестной величины собственной функцией и приравнивания этих членов самой собственной функции, умноженной на произвольный параметр. Применительно к уравнению (III-19a) для собственных функций $Q_k(z)$ по переменной z будем иметь:

член уравнения, зависящий только от z : $\mu_z \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}$;

после замены неизвестной u_n на собственную функцию $Q_k(z)$:

$$\mu_z \frac{\partial^2 Q_k}{\partial z^2};$$

правая часть искомого уравнения: $\Lambda_k \cdot Q_k(z)$,

где Λ — произвольный параметр,

уравнение для собственных функций $\mu_z \frac{\partial^2 Q_k}{\partial z^2} = \Lambda_k Q_k(z)$,

$$\text{или } \frac{d^2 Q_k}{dz^2} + \lambda_k^2 Q_k = 0, \quad (\text{П}_3-1)$$

где $\lambda_k^2 = -\frac{\Lambda_k}{\mu_z}$ — новый произвольный параметр.

Далее, собственные функции должны, как известно, удовлетворять тем же граничным условиям, что и неизвестная величина по выбранной переменной, однако эти условия должны быть однородными. Для получения этих условий необходимо, следовательно, в заданных граничных условиях по выбранной переменной заменить неизвестную величину собственной функцией, а правую часть положить равной нулю. Применительно к нашей задаче необходимо взять вторую пару уравнений (III-20a), и тогда для искоемых собственных функций будем иметь следующие граничные условия:

$$\left. \frac{dQ_k}{dz} \right|_{z=z_1} = 0; \quad \left. \frac{dQ_k}{dz} \right|_{z=z_2} = 0. \quad (\text{П}_3-2)$$

Итак, собственные функции $Q_k(z)$ должны удовлетворять уравнению (П₃-1) и граничным условиям (П₃-2). Решая уравнение (П₃-1), как известно, получим:

$$Q_k = A_k \sin(\lambda_k z) + B_k \cos(\lambda_k z), \quad (\text{П}_3-3)$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Дифференцируя (П₃-3), найдем:

$$\frac{dQ_k}{dz} = \lambda_k A_k \cos(\lambda_k z) + \lambda_k B_k \sin(\lambda_k z),$$

и, используя соотношения (П₃-2), будем иметь:

$$\frac{A_k}{B_k} = \operatorname{tg}(\lambda_k z_1) = \operatorname{tg}(\lambda_k z_2). \quad (\text{П}_3-4)$$

Это равенство может, очевидно, иметь место в том случае, если

$$\lambda_k \cdot z_2 = \lambda_k \cdot z_1 + k\pi,$$

где k — произвольное целое число, положительное или отрицательное, или нуль.

Отсюда следует:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{z_2 - z_1} = \frac{k\pi}{l}, \quad (\text{П}_3-5)$$

где $l = z_2 - z_1$ — длина исследуемого цилиндра [см. выражение (III-1)].

Подставляя (П₃-5) в (П₃-4), найдем:

$$\frac{A_k}{B_k} = \operatorname{tg} \frac{k\pi z_1}{l} = \operatorname{tg} \frac{k\pi z_2}{l},$$

и, следовательно, равенство (П₃-3) примет вид:

$$\begin{aligned} Q_k &= B_k \left[\operatorname{tg} \frac{k\pi z_1}{l} \cdot \sin \frac{k\pi z}{l} + \cos \frac{k\pi z}{l} \right] = \\ &= \frac{B_k}{\cos \frac{k\pi z_1}{l}} \left[\sin \frac{k\pi z_1}{l} \cdot \sin \frac{k\pi z}{l} + \cos \frac{k\pi z_1}{l} \cos \frac{k\pi z}{l} \right] = \\ &= \frac{B_k}{\cos \frac{k\pi z_1}{l}} \cdot \cos \frac{k\pi(z - z_1)}{l}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$C_k = \frac{B_k}{\cos \frac{k\pi z_1}{l}},$$

окончательно будем иметь:

$$Q_k(z) = C_k \cdot \cos \frac{k\pi(z - z_1)}{l}. \quad (\text{П}_3-6)$$

При этом можно считать, что параметр k принимает только положительные значения ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), ибо ввиду четности функции (П₃-6) перемена знака у параметра k не изменит значения этой функции и не даст, следовательно, новых функций в системе Q_k .

Итак,

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (\text{П}_3-17)$$

Собственные функции должны, как известно, составлять систему, ортогональную на рассматриваемом отрезке выбранной переменной. Нетрудно показать, что функции $Q_k(z)$ удовлетворяют этому условию.

Первым признаком ортогональности системы функций $Q_k(z)$ на отрезке $[z_1, z_2]$ является равенство нулю интеграла от произведения двух различных функций $Q_k(z)$ (т. е. двух функций, соответствующих разным значениям параметра k), взятого по всему отрезку $[z_1, z_2]$. Проверим это:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} Q_k(z) \cdot Q_m(z) dz &= C_k C_m \int_{z_1}^{z_2} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \cos \frac{m\pi(z-z_1)}{l} dz = \\ &= C_k C_m \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\cos \frac{(k-m)\pi(z-z_1)}{l} + \cos \frac{(k+m)\pi(z-z_1)}{l} \right] dz = \\ &= C_k C_m \left\{ \frac{l}{2\pi(k-m)} \left[\sin \frac{(k-m)\pi(z-z_1)}{l} \right]_{z_1}^{z_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{2\pi(k+m)} \left[\sin \frac{(k+m)\pi(z-z_1)}{l} \right]_{z_1}^{z_2} \right\} = \\ &= C_k C_m \left\{ \frac{l}{2\pi(k-m)} \sin(k-m)\pi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{2\pi(k+m)} \sin(k+m)\pi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3-8})$$

так как k и m — целые числа и $k \neq m$.

Вторым признаком ортогональности является неравенство нулю интеграла от произведения двух одинаковых собственных функций, т. е. от квадрата собственной функции. Этот интеграл называется квадратом нормы N_k системы функций и может быть вычислен как предел предыдущего интеграла при $m \rightarrow k$:

$$\begin{aligned} N_k^2 &= \int_{z_1}^{z_2} Q_k^2(z) dz = \lim_{m \rightarrow k} \int_{z_1}^{z_2} Q_k(z) Q_m(z) dz = \\ &= \lim_{m \rightarrow k} C_k C_m \left[\frac{l}{2\pi(k-m)} \sin(k-m)\pi + \frac{l}{2\pi(k+m)} \sin(k+m)\pi \right]. \end{aligned}$$

Если $k \neq 0$, то второе слагаемое в полученном выражении равно нулю при любых целых положительных значениях m , в том числе и при $m = k$. Что же касается первого слагаемого, то его предел легко найти с помощью правила Лопиталья:

$$\begin{aligned} N_k^2 &= C_k^2 \cdot \lim_{m \rightarrow k} \frac{l}{2} \cdot \frac{\sin(k-m)\pi}{(k-m)\pi} = \\ &= C_k^2 \lim_{m \rightarrow k} \frac{l}{2} \cos(k-m)\pi = C_k^2 \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

В случае, если $k=0$, то при $m \rightarrow k$, т. е. при $m \rightarrow 0$, второе слагаемое не будет стремиться к нулю, и в этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} N_0^2 &= C_0^2 \lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{l}{2} \cdot \frac{\sin(-m\pi)}{-m\pi} + \frac{l}{2} \frac{\sin m\pi}{m\pi} \right] = \\ &= C_0^2 \lim_{m \rightarrow 0} \left[l \cdot \frac{\sin m\pi}{m\pi} \right] = C_0^2 l. \end{aligned}$$

Таким образом, квадрат нормы функций $Q_k(z)$ равен:

$$N_k^2 = \begin{cases} \frac{l}{2} C_k^2 & \dots\dots (k \neq 0) \\ l C_0^2 & \dots\dots (k = 0) \end{cases}. \quad (\text{П3-9})$$

Соотношения (П3-8 и 9) показывают, что собственные функции $Q_k(z)$ составляют систему, ортогональную на отрезке $[z_1, z_2]$. Из выражения (П3-8) видно также, что функции с отрицательными значениями параметра k не могут входить в ортогональную систему Q_k , так как интеграл от произведения $Q_k(z) \cdot Q_{-k}(z)$ (т. е. при $m = -k$) не будет равен нулю. Тем самым соотношение (П3-7) оказывается еще раз доказанным.

Приложение 4

Вывод уравнения и граничных условий для $u_{nk}(r)$

В результате умножения уравнения (III-19a) на величину $\frac{2}{l} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz$ и почленного интегрирования по z в пределах от z_1 до z_2 аналогично изложенному в приложении 1, принимая во внимание равенство (III-24a) и используя вторую пару граничных условий (III-20a), получим:

а) для первого члена уравнения (III-19a)

$$\begin{aligned} &\int_{z_1}^{z_2} \nu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_n}{\partial r} \right) \cdot \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz = \\ &= \nu_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \right] \right) = \\ &= \nu_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right); \end{aligned} \quad (\text{П4-1})$$

б) для второго члена уравнения (III-19a)

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{z_2} \mu_z \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = \\
 & = \mu_z \frac{2}{l} \left\{ \left[\frac{\partial u_n}{\partial z} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} \right]_{z_1}^{z_2} - \right. \\
 & \left. - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u_n}{\partial z} \left(-\frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi (z-z_1)}{l} \right) dz \right\} = \\
 & = \mu_z \frac{2}{l} \left\{ \left[\frac{\partial u_n}{\partial z} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} \right]_{z_1}^{z_2} + \frac{k\pi}{l} \left[u_n \sin \frac{k\pi (z-z_1)}{l} \right]_{z_1}^{z_2} - \right. \\
 & \left. - \int_{z_1}^{z_2} u_n \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz \right\} = \\
 & = \mu_z \frac{2}{l} \left[\frac{\partial u_n}{\partial z} \right]_{z_2} \cos k\pi - \left[\frac{\partial u_n}{\partial z} \right]_{z_1} \cos 0 \right] + \\
 & + \mu_z \frac{2}{l} \frac{k\pi}{l} [u_n]_{z_2} \sin k\pi - [u_n]_{z_1} \sin 0 - \\
 & - \mu_z \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = \\
 & = \mu_z \frac{2}{l} \left[-\frac{1}{\mu_z} \psi_{2n}(r) \cos k\pi + \frac{1}{\mu_z} \psi_{1n}(r) \right] + 0 - \mu_z \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \cdot u_{nk}(r) = \\
 & = -\mu_z \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \cdot u_{nk} - \frac{2}{l} [\psi_{2n}(r) \cos k\pi - \psi_{1n}(r)]; \quad (\text{П4-2})
 \end{aligned}$$

в) для третьего члена уравнения (III-19a)

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{z_2} -\mu_{\Phi} \frac{N_n^2}{r^2} u_n \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = \\
 & = -\mu_{\Phi} \frac{N_n^2}{r^2} \cdot \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = -\mu_{\Phi} \frac{N_n^2}{r^2} u_{nk}; \quad (\text{П4-3})
 \end{aligned}$$

г) для уравнения (III-19a) в целом согласно выражениям (П4-1-3)

$$\begin{aligned}
 & \mu_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) - \left[\mu_z \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + \mu_{\Phi} \frac{N_n^2}{r^2} \right] u_{nk} = \\
 & = \frac{2}{l} [\psi_{2n}(r) \cos k\pi - \psi_{1n}(r)].
 \end{aligned}$$

Разделив это уравнение на μ_r и обозначив (см. также равенство III-27)

$$\left. \begin{aligned} \chi_k^2 &= \frac{\mu_z}{\mu_r} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \\ \nu_n^2 &= \frac{\mu_{\Phi}}{\mu_r} N_n^2 = \frac{\mu_{\Phi}}{\mu_r} \left(\frac{2n\pi}{T} \right)^2 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П4-4})$$

получим следующее уравнение для $u_{nk}(r)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) - \left(\chi_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) u_{nk} = \\
 & = \frac{2}{\mu_r l} [\psi_{2n}(r) \cos k\pi - \psi_{1n}(r)]. \quad (\text{П4-5})
 \end{aligned}$$

Для получения граничных условий к уравнению (П4-5) возьмем первую пару граничных условий (III-20a), умножим их на величину $\frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz$ и проинтегрируем по z в пределах от z_1 до z_2 .

Учитывая взаимную независимость переменных r и z и принимая во внимание равенство (III-24a), получим:

а) для левых частей равенств (III-20a)

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \cdot \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = \\
 & = \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u_n}{\partial r} \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz \right]_{r=r_1} = \\
 & = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} u_n(r, z) \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz \right\} \right]_{r=r_1} = \\
 & = \left[\frac{\partial}{\partial r} u_{nk}(r) \right]_{r=r_1} = \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_1}; \quad (\text{П4-6})
 \end{aligned}$$

б) для правых частей равенств (III-20a)

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_1}^{z_2} -\frac{1}{\mu_r} \varphi_{1n}(z) \cdot \frac{2}{l} \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = \\
 & = -\frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \varphi_{1n}(z) \cos \frac{k\pi (z-z_1)}{l} dz = -\frac{1}{\mu_r} \cdot \Phi_{1nk}; \quad (\text{П4-7})
 \end{aligned}$$

в) для равенств (III-20a) в целом, согласно (П4-6 и 7),

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{1}{\nu_r} \Phi_{1nk} \\ \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{1}{\nu_r} \Phi_{2nk} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П4-8})$$

где, согласно (П4-7),

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \varphi_{1n}(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \\ \Phi_{2nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \varphi_{2n}(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П4-9})$$

Сравнивая равенства (П4-9) с (III-24a) и учитывая формулы (III-24), нетрудно заключить, что величины Φ_{1nk} и Φ_{2nk} являются коэффициентами разложения функций $\varphi_{1n}(z)$ и $\varphi_{2n}(z)$ в следующие ряды:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1n}(z) &= \frac{1}{2} \Phi_{1n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \\ \varphi_{2n}(z) &= \frac{1}{2} \Phi_{2n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{2nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П4-10})$$

Аналогичным образом для функций $\chi_{1n}(z)$ и $\chi_{2n}(z)$ [см. равенства (П2-11 и 12)] можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{1n}(z) &= \frac{1}{2} X_{1n0} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{1nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \\ \chi_{2n}(z) &= \frac{1}{2} X_{2n0} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2nk} \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П4-11})$$

где

$$\left. \begin{aligned} X_{1nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \chi_{1n}(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \\ X_{2nk} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \chi_{2n}(z) \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} dz \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П4-12})$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (III-25, 26)

Согласно правилу составления дифференциального уравнения для собственных функций (см. приложение 3), заменим в уравнении (III-25) неизвестную величину $u_{nk}(r)$ собственной функцией $Q_s(r)$ и приравняем левую часть полученного уравнения самой собственной функции, умноженной на произвольный параметр Λ_s . Тогда получим:

$$\frac{d^2 Q_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ_s}{dr} - \left(\kappa_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) Q_s = \Lambda Q_s.$$

Вводя обозначение $\lambda_s^2 = -\Lambda_s - \kappa_k^2$ и замечая, что как функция $Q_s(r)$, так и параметр λ_s оказываются (см. ниже) зависящими от параметра ν_n , в силу чего их следует обозначать через $Q_{\nu s}(r)$ и $\lambda_{\nu s}$, приведем дифференциальное уравнение к виду:

$$\frac{d^2 Q_{\nu s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ_{\nu s}}{dr} + \left(\lambda_{\nu s}^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) Q_{\nu s} = 0. \quad (\text{П5-1})$$

Граничными условиями для функций $Q_{\nu s}(r)$, очевидно, будут (см. приложение 3 и уравнения III-26):

$$\frac{dQ_{\nu s}}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad \frac{dQ_{\nu s}}{dr} \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (\text{П5-2})$$

Уравнение (П5-1) является, как известно, уравнением Бесселя, и его общее решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) при } \lambda_{\nu s} \neq 0 \dots Q_{\nu s}(r) &= A_{\nu s} J_{\nu}(\lambda_{\nu s} r) + B_{\nu s} Y_{\nu}(\lambda_{\nu s} r) \\ \text{б) при } \lambda_{\nu s} = 0 \dots Q_{\nu 0}(r) &= A_{\nu 0} r^{\nu} + B_{\nu 0} r^{-\nu} \\ \text{в) при } \lambda_{\nu s} = 0 \dots Q_{00}(r) &= A_{00} \ln r + B_{00} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П5-3})$$

где $A_{\nu s}$ и $B_{\nu s}$ — произвольные постоянные, а $J_{\nu}(\lambda_{\nu s} r)$ и $Y_{\nu}(\lambda_{\nu s} r)$ — бесселевы функции первого и второго рода, ν -го порядка. Случай $\lambda_{\nu s} = 0$ условно обозначен как $s=0$, так что $\lambda_0 \equiv 0$.

Дифференцируя (П5-3) и подставляя результаты в (П5-2), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \lambda_{vs} \neq 0 \dots\dots A_{vs} J'_v(\lambda_{vs} r_1) + B_{vs} Y'_v(\lambda_{vs} r_1) &= 0 \\ &A_{vs} J'_v(\lambda_{vs} r_2) + B_{vs} Y'_v(\lambda_{vs} r_2) = 0 \\ \text{б) } \lambda_{vs} = 0, v \neq 0. A_{v0} r_1^{v-1} - B_{v0} r_1^{v-1} &= 0 \\ &A_{v0} r_2^{v-1} - B_{v0} r_2^{v-1} = 0 \\ \text{в) } \lambda_{vs} = 0, v = 0. \frac{A_{00}}{r_1} = 0; \frac{A_{00}}{r_2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П5-4})$$

где через $J'_v(x)$ и $Y'_v(x)$ обозначены производные функций $J(x)$ и $Y_v(x)$ по их аргументу $x = \lambda_{vs} r$.

Из равенств (П5-4), очевидно, следует:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } -\frac{A_{vs}}{B_{vs}} &= \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_1)}{J'_v(\lambda_{vs} r_1)} = \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_2)}{J'_v(\lambda_{vs} r_2)} = u_{vs} \\ \text{б) } A_{v0} &= B_{v0} = 0 \\ \text{в) } A_{00} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П5-5})$$

Подставляя (П5-5) в (П5-3) и вводя обозначение

$$C_{vs} = \begin{cases} -B_{vs} \dots\dots (s \neq 0) \\ + B_{00} \dots\dots (s = 0, v = 0), \end{cases}$$

получим окончательные выражения для собственных функций краевой задачи (III-25, 26):

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } s \neq 0 \dots\dots Q_{vs}(r) &= C_{vs} [u_{vs} J_v(\lambda_{vs} r) - Y_v(\lambda_{vs} r)] \\ \text{б) } s = 0, v \neq 0 \dots Q_{v0}(r) &= 0 \\ \text{в) } s = 0, v = 0 \dots Q_{00}(r) &= C_{00} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П5-6})$$

где

$$u_{vs} = \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_1)}{J'_v(\lambda_{vs} r_1)} = \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_2)}{J'_v(\lambda_{vs} r_2)}, \quad (\text{П5-7})$$

а величины λ_s должны удовлетворять уравнению

$$\frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_1)}{J'_v(\lambda_{vs} r_1)} = \frac{Y'_v(\lambda_{vs} r_2)}{J'_v(\lambda_{vs} r_2)},$$

которое после введения обозначений

$$\xi_{vs} = \lambda_{vs} r_1; \quad \rho = \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{П5-8})$$

можно представить в виде:

$$\frac{Y'_v(\xi_{vs})}{J'_v(\xi_{vs})} - \frac{Y'_v(\rho \xi_{vs})}{J'_v(\rho \xi_{vs})} = 0. \quad (\text{П5-9})$$

Уравнение (П5-9), как известно, имеет бесчисленное количество решений (корней), значения которых зависят от v и могут быть вычислены по следующей формуле [59]:

$$\xi_{vs} = \delta + \frac{p}{\delta} + \frac{q - p^2}{\delta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\delta^5} + \dots, \quad (\text{П5-10})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\pi}{\rho - 1} \cdot s, \quad p = \frac{m + 3}{8\rho} \\ q &= \frac{4(m^2 + 46m - 63)(\rho^3 - 1)}{3(8\rho)^3(\rho - 1)} \\ r &= \frac{32(m^3 + 185m^2 - 2053m + 1899)(\rho^5 - 1)}{5(8\rho)^5(\rho - 1)} \\ m &= 4v^2, s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots \infty \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П5-11})$$

Таким образом, краевая задача (III-25, 26) имеет бесчисленное количество собственных функций вида (П5-6), соответствующих $s = 1, 2, 3, \dots \infty$ (при $v \neq 0$) или $s = 0, 1, 2, 3, \dots \infty$ (при $v = 0$). При этом можно показать, что эти функции при каждом v образуют систему, ортогональную на отрезке $[r_1, r_2]$ с весом r , т. е. удовлетворяют соотношению — [ср. выражения (II-8 и 9) в приложении 3]:

$$\int_{r_1}^{r_2} r Q_{vs}(r) \cdot Q_{vt}(r) dr = \begin{cases} 0 \dots\dots (t \neq s) \\ N_{vs}^2 \neq 0 \dots (t = s) \end{cases}. \quad (\text{П5-12})$$

Для доказательства этого положения заметим, что поскольку собственные функции $Q_{vs}(r)$ удовлетворяют уравнению (П5-1), то можно написать:

$$\left. \begin{aligned} Q''_{vs} + \frac{1}{r} Q'_{vs} + \left(\lambda_{vs}^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) Q_{vs} &= 0 \\ Q''_{vt} + \frac{1}{r} Q'_{vt} + \left(\lambda_{vt}^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) Q_{vt} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

или, после небольших преобразований:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_{vs}^2 r Q_{vs} &= r Q''_{vs} + Q'_{vs} - \frac{v^2}{r} Q_s \\ -\lambda_{vt}^2 r Q_{vt} &= r Q''_{vt} + Q'_{vt} - \frac{v^2}{r} Q_{vt} \end{aligned} \right\}.$$

Умножая первое уравнение на Q_{vt} , а второе — на Q_{vs} и вычитая второе уравнение из первого, найдем:

$$(\lambda_{vt}^2 - \lambda_{vs}^2) r Q_{vs} Q_{vt} = \\ = r(Q_{vt} Q_{vs}'' - Q_{vs} Q_{vt}'') + (Q_{vt} Q_{vs}' - Q_{vs} Q_{vt}').$$

Правая часть этого равенства представляет собой, как нетрудно проверить, производную от выражения $r(Q_{vt} Q_{vs}' - Q_{vs} Q_{vt}')$, в связи с чем равенство можно переписать в виде:

$$(\lambda_{vt}^2 - \lambda_{vs}^2) r Q_{vs} Q_{vt} = \frac{d}{dr} [r(Q_{vt} Q_{vs}' - Q_{vs} Q_{vt}')].$$

Интегрируя это равенство по r в пределах от r_1 до r_2 , получим:

$$\int_{r_1}^{r_2} r Q_{vs} Q_{vt} dr = \frac{1}{\lambda_{vt}^2 - \lambda_{vs}^2} [r(Q_{vt} Q_{vs}' - Q_{vs} Q_{vt}')]_{r_1}^{r_2}. \quad (\Pi_5-13)$$

При подстановке пределов r_1 и r_2 в числителе правой части равенства (Π_5-13) получится, очевидно, нуль, так как, согласно равенствам (Π_5-2), будем иметь:

$$Q_{vs}'|_{r=r_1} = Q_{vs}'|_{r=r_2} = Q_{vt}'|_{r=r_1} = Q_{vt}'|_{r=r_2} = 0. \quad (\Pi_5-14)$$

Если $t \neq s$, то $\lambda_{vt} \neq \lambda_{vs}$ и знаменатель правой части равенства (Π_5-13) будет отличен от нуля, так что в результате получим:

$$\int_{r_1}^{r_2} r Q_{vs}(r) Q_{vt}(r) dr = 0 \dots (t \neq s). \quad (\Pi_5-15)$$

Если же $t = s$, то $\lambda_{vt} = \lambda_{vs}$ и знаменатель правой части, так же как и ее числитель, будет равен нулю. В этом случае значение интеграла (Π_5-13) следует искать в виде предела правой части равенства (Π_5-13) при $\lambda_{vt} \rightarrow \lambda_{vs}$, а для его вычисления применить правило Лопиталья:

$$N_{vs}^2 = \int_{r_1}^{r_2} r Q_{vs}^2(r) dr = \lim_{\lambda_{vt} \rightarrow \lambda_{vs}} \frac{[r(Q_{vt} Q_{vs}' - Q_{vs} Q_{vt}')]_{r_1}^{r_2}}{\lambda_{vt}^2 - \lambda_{vs}^2} = \\ = \lim_{\lambda_{vt} \rightarrow \lambda_{vs}} \frac{\left[r \left(\frac{\partial Q_{vt}}{\partial \lambda_{vt}} \cdot \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} - Q_{vs} \frac{\partial^2 Q_{vt}}{\partial \lambda_{vt} \partial r} \right) \right]_{r_1}^{r_2}}{2\lambda_{vt}} = \\ = \left[\frac{r}{2\lambda_{vs}} \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial \lambda_{vs}} \cdot \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} - Q_{vs} \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial \lambda_{vs} \partial r} \right) \right]_{r_1}^{r_2}. \quad (\Pi_5-16)$$

Для определения входящих в выражение (Π_5-16) частных производных Q_{vs} и λ_{vs} обратим внимание на первую формулу (Π_5-3), из которой видно, что при $\lambda_{vs} \neq 0$ величина Q_{vs} рассматривается как функция двух переменных r и λ_{vs} и зависит лишь от произведения этих переменных:

$$x_{vs} = \lambda_{vs} r. \quad (\Pi_5-17)$$

Действительно, если считать, что Q_{vs} есть функция от x_{vs} , то для производных Q_{vs} по r будем согласно выражению (Π_5-17) иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} &= \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \cdot \frac{\partial x_{vs}}{\partial r} = \lambda_{vs} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \\ \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial r^2} &= \lambda_{vs} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \right) = \lambda_{vs}^2 \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial x_{vs}^2} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_5-18)$$

Подставив эти равенства в уравнения (Π_5-1 и 2), получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{vs}^2 \left[\frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial x_{vs}^2} + \frac{1}{x_{vs}} \cdot \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} + \left(1 - \frac{v_n^2}{x_{vs}^2} \right) Q_{vs} \right] &= 0 \\ \lambda_{vs} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \Big|_{x_{vs1}} &= 0; \quad \lambda_{vs} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \Big|_{x_{vs2}} = 0 \end{aligned} \right\},$$

откуда и можно окончательно заключить, что если $\lambda_{vs} \neq 0$, то величина Q_{vs} является функцией от x_{vs} , т. е. от произведения $\lambda_{vs} r$.

На основании этого можно написать, учитывая еще равенства (Π_5-18 и 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial \lambda_{vs}} \cdot \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \cdot \frac{\partial x_{vs}}{\partial \lambda_{vs}} &= r \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} = \frac{r}{\lambda_{vs}} \cdot \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r}; \\ \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial \lambda_{vs} \partial r} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_{vs}} \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{vs}} \left(\lambda_{vs} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} \right) = \\ &= \lambda_{vs} \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial x_{vs}^2} \cdot \frac{\partial x_{vs}}{\partial \lambda_{vs}} + \frac{\partial Q_{vs}}{\partial x_{vs}} = \\ &= \frac{r}{\lambda_{vs}} \cdot \frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial r^2} + \frac{1}{\lambda_{vs}} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} = \frac{r}{\lambda_{vs}} \left(\frac{\partial^2 Q_{vs}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} \right) = \\ &= - \frac{r}{\lambda_{vs}} \left(\lambda_{vs}^2 - \frac{v_n^2}{r^2} \right) Q_{vs}. \end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в выражение (Π_5-16) и имея в виду равенства (Π_5-2 и 8), получим:

$$N_{vs}^2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\lambda_{vs}} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} \right)^2 + \left(\lambda_{vs}^2 - \frac{v_n^2}{r^2} \right) \cdot Q_{vs}^2 \right\} \right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{\lambda_{vs}} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r_2} + \left(\lambda_{vs}^2 + \frac{\nu_n^2}{r_2^2} \right) Q_{vs}^2(r_2) \right\} - \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{\lambda_{vs}} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial Q_{vs}}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r_1} + \left(\lambda_{vs}^2 - \frac{\nu_n^2}{r_1^2} \right) Q_{vs}^2(r_1) \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left(r_2^2 - \frac{\nu_n^2}{\lambda_{vs}^2} \right) Q_{vs}^2(r_2) - \frac{1}{2} \left(r_1^2 - \frac{\nu_n^2}{\lambda_{vs}^2} \right) Q_{vs}^2(r_1) = \\
&= \frac{1}{2\lambda_{vs}^2} \{ [(\rho \xi_{vs})^2 - \nu_n^2] Q_{vs}^2(r_2) - [\xi_{vs}^2 - \nu_n^2] Q_{vs}^2(r_1) \} = \\
&= \frac{r_1^2}{2\xi_{vs}^2} \{ [(\rho \xi_{vs})^2 - \nu_n^2] Q_{vs}^2(r_2) - [\xi_{vs}^2 - \nu_n^2] Q_{vs}^2(r_1) \}. \quad (\text{П5-19})
\end{aligned}$$

Для определения входящих в выражение (П5-19) величин $Q_{vs}(r_1)$ и $Q_{vs}(r_2)$ воспользуемся равенствами (П5-6 и 7). При $\lambda_{vs} \neq 0$, т. е. при $s \neq 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
Q_{vs}(r_2) &= \frac{C_{vs}}{J'_v(\lambda_{vs} r_2)} [Y'_v(\lambda_{vs} r_2) J_v(\lambda_{vs} r_2) - J'_v(\lambda_{vs} r_2) Y_v(\lambda_{vs} r_2)] \\
Q_{vs}(r_1) &= \frac{C_{vs}}{J'_v(\lambda_{vs} r_1)} [Y'_v(\lambda_{vs} r_1) J_v(\lambda_{vs} r_1) - J'_v(\lambda_{vs} r_1) Y_v(\lambda_{vs} r_1)]
\end{aligned} \quad (\text{П5-20})$$

Выражения в квадратных скобках можно упростить, используя известное равенство [59]:

$$J_v(x) Y'_v(x) - J'_v(x) Y_v(x) = \frac{1}{x}. \quad (\text{П5-21})$$

Формулы (П5-20) с учетом равенств (П5-21 и 8) примут вид:

$$\begin{aligned}
Q_{vs}(r_2) &= \frac{C_{vs}}{\lambda_{vs} r_2 J'_v(\lambda_{vs} r_2)} = \frac{C_{vs}}{\rho \xi_{vs} J'_v(\rho \xi_{vs})} = \frac{C_{vs}}{F_{2vs}} \\
Q_{vs}(r_1) &= \frac{C_{vs}}{\lambda_{vs} r_1 J'_v(\lambda_{vs} r_1)} = \frac{C_{vs}}{\xi_{vs} J'_v(\xi_{vs})} = \frac{C_{vs}}{F_{1vs}}
\end{aligned} \quad (\text{П5-22})$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{1vs} &= \xi_{vs} J'_v(\xi_{vs}) \\ F_{2vs} &= \rho \xi_{vs} J'_v(\rho \xi_{vs}) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П5-23})$$

Подставляя (П5-22) в (П5-19), получим окончательное выражение для квадрата нормы функций $Q_{vs}(r)$ при $s \neq 0$:

$$N_{vs} = \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{C_{vs}}{\xi_{vs}} \right)^2 \left[\frac{(\rho \xi_{vs})^2 - \nu_n^2}{F_{2vs}^2} - \frac{\xi_{vs}^2 - \nu_n^2}{F_{1vs}^2} \right]. \quad (\text{П5-24})$$

Осталось рассмотреть случай $s = 0$. Согласно равенствам (П5-6), этот случай представляет интерес только для $\nu = 0$, ибо при $\nu \neq 0$ функции $Q_{v0}(r)$ тождественно равны нулю. В случае же $s = 0$, $\nu = 0$, имеем $Q_{00}(r) = B_{00}$, и квадрат нормы для этой функции будет равен:

$$\begin{aligned}
N_{00} &= \int_{r_1}^{r_2} r Q_{00}^2(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} r C_{00}^2 dr = C_{00}^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = \\
&= \frac{C_{00}^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{r_1^2}{2} C_{00}^2 (\rho^2 - 1). \quad (\text{П5-25})
\end{aligned}$$

Для дальнейшего представляется удобным объединить выражения (П5-24) и (П5-25) в одной формуле

$$N_{vs} = \frac{r_1^2}{2} C_{vs}^2 \cdot \Gamma_{vs}, \quad (\text{П5-26})$$

которая, очевидно, справедлива при любых значениях s и ν , если для величины Γ_{vs} написать:

$$\Gamma_{vs} = \left\{ \begin{aligned} &\left| \frac{1}{\xi_{vs}^2} \left[\frac{(\rho \xi_{vs})^2 - \nu_n^2}{F_{2vs}^2} - \frac{\xi_{vs}^2 - \nu_n^2}{F_{1vs}^2} \right] \right| \dots\dots (s \neq 0) \\ &(\rho^2 - 1) \dots\dots\dots (s = 0) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П5-27})$$

Приложение 6

Вывод выражения для u_{nsk}

В результате умножения уравнения (П5-25) на величину $\frac{2}{R_{vs}^2} r q_{vs}(r) dr$ и интегрирования по r в пределах от r_1 до r_2 с применением правила интегрирования по частям и с учетом равенств (П5-26, 30а и 31) получим:

а) для левой части уравнения (П5-25)

$$\begin{aligned}
&\int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) - \left(\kappa_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) u_{nk} \right] \frac{2}{R_{vs}^2} r q_{vs}(r) dr = \\
&= \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) - \left(\kappa_k^2 r + \frac{\nu_n^2}{r} \right) u_{nk} \right] q_{vs}(r) dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{R_{vs}^2} \left[\left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) q_{vs}(r) \right]_{r_1}^{r_2} - \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(r \frac{du_{nk}}{dr} \right) q'_{vs}(r) + \right. \\
&+ \left. \left(\chi_k^2 r + \frac{\nu_n^2}{r} \right) u_{nk} q_{vs}(r) \right] dr = \frac{2}{R_{vs}^2} \left[\frac{du_{nk}}{dr} \cdot r q_{vs}(r) \right]_{r_1}^{r_2} - \\
&- \frac{2}{R_{vs}^2} [u_{nk} \cdot r q'_{vs}(r)]_{r_1}^{r_2} + \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} [u_{nk} (r q''_{vs} + q'_{vs}) - \\
&- \left(\chi_k^2 r + \frac{\nu_n^2}{r} \right) u_{nk} q_{vs}] dr = \frac{2}{R_{vs}^2} \left[\frac{du_{nk}}{dr} r q_{vs}(r) \right]_{r_1}^{r_2} - \\
&- \frac{2}{R_{vs}^2} [u_{nk} r q'_{vs}(r)]_{r_1}^{r_2} + \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r u_{nk} \left[q''_{vs} + \frac{1}{r} q'_{vs} - \right. \\
&- \left. \left(\chi_k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) q_{vs} \right] dr = \frac{2}{R_{vs}^2} \left[\frac{du_{nk}}{dr} r q_{vs}(r) \right]_{r_1}^{r_2} - \\
&- \frac{2}{R_{vs}^2} [u_{nk} r q'_{vs}(r)]_{r_1}^{r_2} - \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r u_{nk}(r) (\chi_k^2 + \lambda_{vs}^2) q_{vs}(r) dr = \\
&= \frac{2}{R_{vs}^2} \left[-\frac{1}{\mu_r} \Phi_{2nk} r_2 q_{vs}(r_2) + \frac{1}{\mu_r} \Phi_{1nk} r_1 q_{vs}(r_1) \right] - \\
&- 0 - (\chi_k^2 + \lambda_{vs}^2) U_{nks} = \frac{2}{\mu_r R_{vs}^2} [r_1 q_{vs}(r_1) \Phi_{1nk} - r_2 q_{vs}(r_2) \Phi_{2nk}] - \\
&- (\chi_k^2 + \lambda_{vs}^2) U_{nks}; \quad (\text{П6-1})
\end{aligned}$$

б) для правой части уравнения (III-25)

$$\begin{aligned}
&\int_{r_1}^{r_2} \frac{2}{\mu_r l} [\phi_{2n}(r) \cos k\pi - \phi_{1n}(r)] \cdot \frac{2}{R_{vs}^2} r q_{vs}(r) dr = \\
&= \frac{2}{\mu_r l} \left[\cos k\pi \cdot \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \phi_{2n}(r) q_{vs}(r) dr - \right. \\
&- \left. \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \phi_{1n}(r) q_{vs}(r) dr \right] = \frac{2}{\mu_r l} (\Psi_{2ns} \cos k\pi - \Psi_{1ns}); \quad (\text{П6-2})
\end{aligned}$$

в) для уравнения (III-25) в целом — согласно (П6-1 и 2)

$$\begin{aligned}
(\chi_k^2 + \lambda_{vs}^2) U_{nks} &= \frac{2}{\mu_r} \left[\frac{r_1 q_{vs}(r_1)}{R_{vs}^2} \cdot \Phi_{1nk} - \frac{r_2 q_{vs}(r_2)}{R_{vs}^2} \cdot \Phi_{2nk} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{l} (\Psi_{1ns} - \Psi_{2ns} \cos k\pi) \right], \quad (\text{П6-3})
\end{aligned}$$

причем в равенствах (П6-2 и 3)

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1ns} &= \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \phi_{1n}(r) q_{vs}(r) dr \\ \Psi_{2ns} &= \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \phi_{2n}(r) q_{vs}(r) dr \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П6-4})$$

Сравнивая равенства (П6-4) с (III-30a) и учитывая выражение (III-30), нетрудно заключить, что величины Ψ_{1ns} и Ψ_{2ns} являются коэффициентами разложения функций $\phi_{1n}(r)$ и $\phi_{2n}(r)$ в следующие ряды:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1n}(r) &= \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_{1ns} q_{vs}(r) \\ \phi_{2n}(r) &= \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_{2ns} q_{vs}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П6-5})$$

Аналогичным образом для функций $\omega_{1n}(r)$ и $\omega_{2n}(r)$ [см. формулы (П2-11 и 12)] можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1n}(r) &= \sum_{s=0}^{\infty} \Omega_{1ns} q_{vs}(r) \\ \omega_{2n}(r) &= \sum_{s=0}^{\infty} \Omega_{2ns} q_{vs}(r) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П6-6})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{1ns} &= \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \omega_{1n}(r) q_{vs}(r) dr \\ \Omega_{2ns} &= \frac{2}{R_{vs}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \omega_{2n}(r) q_{vs}(r) dr \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П6-7})$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} A_{vs} &= \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_1 q_{vs}(r_1)}{K_{vs}^2} \\ B_{vs} &= \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_2 q_{vs}(r_2)}{K_{vs}^2} \\ \Psi_{nks} &= \frac{2}{\mu_r} (\Psi_{1ns} - \Psi_{2ns} \cos k\pi) \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_6-8)$$

при этом равенство (П₆-3) примет более простой вид:

$$(\chi_k^2 + \chi_{vs}^2) U_{nks} = A_{vs} \Phi_{1nk} - B_{vs} \Phi_{2nk} + \Psi_{nks}. \quad (\Pi_6-9)$$

Для случая $n=0, s=0$ первые два равенства (П₆-8) с учетом соотношений (П₃-29с), (П₅-27 и 8) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_1 \cdot 1}{r_1^2 (\rho^2 - 1)} = \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_1}{r_2^2 - r_1^2} \\ B_{00} &= \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_2 \cdot 1}{r_1^2 (\rho^2 - 1)} = \frac{2}{\mu_r} \cdot \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_6-10)$$

Приложение 7

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (П₃-37, 38)

Общее решение уравнения (П₃-37), как известно, равно:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \chi_k \neq 0, \text{ т. е. } k \neq 0 \\ u_{nk}(r) &= A_{nk} I_\nu(\chi_k r) + B_{nk} K_\nu(\chi_k r) \\ \text{б) } k &= 0, \nu \neq 0 \\ u_{n0}(r) &= A_{n0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu + B_{n0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu \\ \text{в) } k &= 0, \nu = 0 \\ u_{00}(r) &= A_{00} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + B_{00} \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_7-1)$$

где A_{nk}, B_{nk} и r_0 — произвольные постоянные, а $I(\chi_k r)$ и $K(\chi_k r)$ — видоизмененные функции Бесселя первого и второго рода.

Дифференцируя равенства (П₇-1) и используя граничные условия (П₃-38), получим:

а) $k \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= \chi_k [A_{nk} I'_\nu(\chi_k r_1) + B_{nk} K'_\nu(\chi_k r_1)] = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{1nk} \\ \frac{du_{nk}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= \chi_k [A_{nk} I'_\nu(\chi_k r_2) + B_{nk} K'_\nu(\chi_k r_2)] = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{2nk} \end{aligned} \right\}$$

б) $k = 0, n \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{n0}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= \frac{\nu}{r_0} \left[A_{n0} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\nu-1} - B_{n0} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\nu+1} \right] = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{1n0} \\ \frac{du_{n0}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= \frac{\nu}{r_0} \left[A_{n0} \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\nu-1} - B_{n0} \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{\nu+1} \right] = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{2n0} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_7-2)$$

в) $k = 0, n = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{00}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= \frac{A_{00}}{r_1} = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{100} \\ \frac{du_{00}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= \frac{A_{00}}{r_2} = -\frac{1}{\mu_r} \Phi_{200} \end{aligned} \right\}$$

Решая полученные уравнения относительно A_{nk} и B_{nk} после небольших преобразований найдем:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } k \neq 0 \\ A_{nk} &= \frac{K'_\nu(\chi_k r_1) \cdot \Phi_{2nk} - K'_\nu(\chi_k r_2) \Phi_{1nk}}{M_{nk}} \\ B_{nk} &= \frac{I'_\nu(\chi_k r_2) \Phi_{1nk} - I'_\nu(\chi_k r_1) \Phi_{2nk}}{M_{nk}}, \end{aligned} \right\}$$

где $M_{nk} = \mu_r \chi_k [I'_\nu(\chi_k r_1) K'_\nu(\chi_k r_2) - I'_\nu(\chi_k r_2) K'_\nu(\chi_k r_1)]$

б) $k = 0, n \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} A_{n0} &= \frac{\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{\nu+1} \Phi_{1n0} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\nu+1} \Phi_{2n0}}{M_{n0}} \\ B_{n0} &= \frac{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\nu-1} \Phi_{1n0} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\nu-1} \Phi_{2n0}}{M_{n0}}, \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_7-3)$$

где

$$M_{n0} = \mu_r \nu \cdot \frac{r_0}{r_1 \cdot r_2} \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\nu - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\nu \right];$$

в) $k = 0, n = 0$ $A_{00} = -\frac{r_1}{\mu_r} \Phi_{100}$ или $A_{00} = -\frac{r_2}{\mu_r} \Phi_{200}$
 B_{00} — неопределенно (произвольно)

Подставляя (П7-3) в (П7-1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } k \neq 0. \quad u_{nk}(r) &= P_{nk}^{\circ}(r) \Phi_{1nk} - R_{nk}^{\circ}(r) \Phi_{2nk} \\ \text{б) } k=0, n \neq 0. \quad u_{n0}(r) &= P_{n0}^{\circ}(r) \Phi_{1n0} - R_{n0}^{\circ}(r) \cdot \Phi_{2n0} \\ \text{в) } k=0, n=0. \quad u_{00}(r) &= B_{00} - p_{00}^{\circ}(r) \cdot \Phi_{100}, \\ &\text{или } u_{00}(r) = B_{00} - \frac{r_2}{r_1} p_{00}^{\circ}(r) \Phi_{200} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П7-4})$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_{nk}^{\circ}(r) &= \frac{1}{\mu_r x_k} \cdot \frac{I'_v(x_k r_2) K_v(x_k r) - K'_v(x_k r_2) I_v(x_k r)}{I'_v(x_k r_1) K'_v(x_k r_2) - I'_v(x_k r_2) K'_v(x_k r_1)} \\ R_{nk}^{\circ}(r) &= \frac{1}{\mu_r x_k} \cdot \frac{I'_v(x_k r_1) K_v(x_k r) - K'_v(x_k r_1) I_v(x_k r)}{I'_v(x_k r_1) K'_v(x_k r_2) - I'_v(x_k r_2) K'_v(x_k r_1)} \\ P_{n0}^{\circ}(r) &= \frac{r_1}{\mu_r v} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_2}\right)^v + \left(\frac{r_2}{r}\right)^v}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^v - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^v} \\ R_{n0}^{\circ}(r) &= \frac{r_2}{\mu_r v} \cdot \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^v + \left(\frac{r_1}{r}\right)^v}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^v - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^v} \\ p_{00}^{\circ}(r) &= \frac{r_1}{\mu_r} \cdot \ln \left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П7-5})$$

Приложение 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ C_{00} В ВЫРАЖЕНИИ (П4-1б)

Согласно (П3-40с), имеем:

$$p_{00}^{\circ}(r) = \frac{r_1}{\mu_r} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (\text{П8-1})$$

Представим функцию $\ln \frac{r}{r_0}$ в виде ряда по функциям $q_{0s}(r)$. По аналогии с выражениями (П3-30 и 30а) будем, очевидно, иметь:

$$\ln \frac{r}{r_0} = L_0 + \sum_{s=1}^{\infty} L_s \cdot q_{0s}(r), \quad (\text{П8-2})$$

$$L_s = \frac{2}{R_{0s}^2} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r \ln \frac{r}{r_0} \cdot q_{0s}(r) dr. \quad (\text{П8-3})$$

Для вычисления интеграла (П8-3) заметим, что поскольку функция $q_{0s}(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (П3-31), где только надо положить $v_n = 0$, то из этого уравнения следует:

$$q_{0s}(r) = -\frac{1}{\lambda_{0s}^2} \cdot \left[\frac{d^2 q_{0s}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dq_{0s}}{dr} \right] = -\frac{1}{\lambda_{0s}^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dq_{0s}}{dr} \right).$$

Умножая это равенство на $r dr$ и интегрируя, найдем:

$$\int r q_{0s}(r) dr = -\frac{1}{\lambda_{0s}^2} \cdot \left(r \frac{dq_{0s}}{dr} \right) = -\frac{r}{\lambda_{0s}^2} \cdot q'_{0s}(r). \quad (\text{П8-4})$$

Вычислим теперь интеграл (П8-3), применяя правило интегрирования по частям и используя равенства (П8-4) и (П3-31):

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{2}{R_{0s}^2} \int_{r_1}^{r_2} r \ln \frac{r}{r_0} q_{0s}(r) dr = \frac{2}{R_{0s}^2} \left[\ln \frac{r}{r_0} \cdot \int r q_{0s} dr \right]_{r_1}^{r_2} - \\ &- \frac{2}{R_{0s}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left[\int r q_{0s} dr \right] dr = \frac{2}{R_{0s}^2} \left[-\frac{r}{\lambda_{0s}^2} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \cdot q'_{0s}(r) \right]_{r_1}^{r_2} + \\ &+ \frac{2}{R_{0s}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda_{0s}^2} q'_{0s}(r) dr = \frac{2}{R_{0s}^2 \lambda_{0s}^2} \cdot [q_{0s}(r_2) - q_{0s}(r_1)]. \quad (\text{П8-5}). \end{aligned}$$

Для случая $s=0$, согласно выражениям (П3-29с), (П5-27 и 8), имеем:

$$q_{00}(r) = 1,$$

$$R_{00}^2 = Y_{00} r_1^2 = (\rho^2 - 1) r_1^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

и в связи с этим для L_0 найдем:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{2}{R_{00}^2} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r \ln \frac{r}{r_0} \cdot 1 \cdot dr = \frac{2}{R_{00}^2} \left[\ln \frac{r}{r_0} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} - \frac{2}{R_{00}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{2} dr = \\ &= \frac{1}{R_{00}^2} \left[r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right]_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{R_{00}^2} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right) - r_1^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (\text{П8-6}) \end{aligned}$$

Подставляя (П8-5 и 6) в (П8-2), получим:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right) - r_1^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_{0s}(r_2) - q_{0s}(r_1)}{R_{0s}^2 \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r). \quad (\text{П8-7})$$

Далее, согласно (П8-40с) и (П8-8), будем иметь:

$$p_{00}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{0s} - \frac{r_1}{r_2} B_{0s}}{\lambda_{0s}^2} q_{0s}(r) = -\frac{2r_1}{\mu_r} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_{0s}(r_2) - q_{0s}(r_1)}{R_{0s}^2 \lambda_{0s}^2} \cdot q_{0s}(r) \quad (\text{П8-8})$$

и, подставляя в равенство (П8-41b) результаты (П8-8, 1 и 7), получим окончательно:

$$C_{00} = p_{00}(r) + p_{00}^0(r) = \frac{r_1}{\mu_r} \cdot \frac{r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right) - r_1^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{1}{2} \right)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (\text{П8-9})$$

Приложение 9

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $R_{nk}^{(i)}(r)$, $R_{nk}^{(i)}(r)$, $G_{nk}^{(i)}(r)$ и т. п.

1) Для станины ($i=1$), согласно формулам (П8-44a, 42i, 17), имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_1^{(1)} &= R_2 \quad \nu_n^{(1)} = \frac{2n\pi}{T} = mn = N = \text{целому числу} \\ r_2^{(1)} &= R_1 \quad \kappa_k^{(1)} = \frac{k\pi}{l} \quad \lambda_{\nu s}^{(1)} = \frac{1}{R_2} \cdot \xi_{\nu s}^{(1)} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П9-1})$$

Поэтому, если ещё для краткости обозначить

$$x_{1k} = \kappa_k^{(1)} \cdot R_1; \quad x_{2k} = \kappa_k^{(1)} \cdot R_2, \quad (\text{П9-2})$$

то для входящих в равенства (П8-45a) функций $R_{nk}^{(i)}(r)$, $G_{nk}^{(i)}(r)$, $h_{00}^{(i)}(r)$ и $H_{nk}^{(i)}(r)$, согласно формулам (П8-42e, h, l) с учетом (П8-42i, m), (П9-1, 2) можно написать:

$$P_{nk}^{(1)}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x_{2k}} \cdot \frac{I'_N(x_{1k}) \cdot K'_N(\kappa_k^{(1)} r) - K'_N(x_{1k}) \cdot I'_N(\kappa_k^{(1)} r)}{I'_N(x_{2k}) \cdot K'_N(x_{1k}) - I'_N(x_{1k}) \cdot K'_N(x_{2k})} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^N + \left(\frac{R_1}{r}\right)^N}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^N - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^N} \dots \dots \dots \left(\begin{aligned} &k=0 \\ &n \neq 0 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П9-3})$$

$$\left. \begin{aligned} G_{nk}^{(1)}(r) &= \frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{2R_2}{l} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Psi_{1ns} - \Psi_{2ns} \cos k\pi}{x_{2k}^2 + \xi_{NS}^2} \cdot q_{NS}^{(1)}(r) \dots \dots \dots n \neq 0 \\ &\frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{2R_2}{l} \left[\frac{\Psi_{100} - \Psi_{200} \cos k\pi}{x_{2k}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Psi_{10s} - \Psi_{20s} \cos k\pi}{x_{2k}^2 + \xi_{0s}^2} \cdot q_{0s}^{(1)}(r) \right] \dots \dots \dots \left(\begin{aligned} &n=0 \\ &k \neq 0 \end{aligned} \right) \\ h_{00}^{(1)}(r) &= \\ &= \frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{2R_2}{l} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\Psi_{10s} - \Psi_{20s}) - \alpha_{\nu s}^{(1)} q_{0s}^{(1)}(R_2) \cdot (\Psi_{100} - \Psi_{200})}{\xi_{0s}^2} \cdot q_{0s}^{(1)}(r) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П9-4})$$

$$H_{nk}^{(1)}(r) = \frac{R_2}{\mu_1} \cdot \frac{2R_2}{l} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Omega_{1ns} - \Omega_{2ns} \cos k\pi}{x_{2k}^2 + \xi_{NS}^2} \cdot q_{NS}^{(1)}(r). \quad (\text{П9-5})$$

Входящие в равенства (П9-4 и 5) коэффициенты Ψ_{1ns} , Ψ_{2ns} , Ω_{1ns} и Ω_{2ns} вычисляются по формулам (П6-4, 7 и П2-11), где под $b_{21}(r, \theta)$ и $b_{22}(r, \theta)$ следует понимать индукцию на торцах станины, определяемую граничными условиями (П8-12с и 16a). Что же касается выражений для собственных функций $q_{NS}^{(1)}(r)$ и связанных с ними величин $\xi_{NS}^{(1)}$, $\nu_{NS}^{(1)}$, $\alpha_{0s}^{(1)}$ то они, согласно формулам (П8-42i), (П9-1), (П5-27, 23), могут быть представлены в виде:

$$q_{NS}^{(1)}(r) = \nu_{NS}^{(1)} \cdot J_N\left(\xi_{NS}^{(1)} \cdot \frac{r}{R_2}\right) - Y_N\left(\xi_{NS}^{(1)} \cdot \frac{r}{R_2}\right), \quad (\text{П9-6})$$

$$\nu_{NS}^{(1)} = \frac{Y'_N(\xi_{NS}^{(1)})}{J'_N(\xi_{NS}^{(1)})} = \frac{Y'_N\left(\xi_{NS}^{(1)} \cdot \frac{R_1}{R_2}\right)}{J'_N\left(\xi_{NS}^{(1)} \cdot \frac{R_1}{R_2}\right)}, \quad (\text{П9-7})$$

$$\alpha_{0s}^{(1)} = \frac{r_{00}}{r_{0s}} = \frac{\rho^2 - 1}{\frac{\rho^2}{F_{20s}^2} - \frac{1}{F_{10s}^2}} = \frac{\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 1\right] \cdot [\xi_{0s}^{(1)}]^2}{\left[\frac{1}{J_0'(\xi_{0s}^{(1)} \frac{R_1}{R_2})}\right]^2 - \left[\frac{1}{J_0'(\xi_{0s}^{(1)})}\right]^2}, \quad (\Pi_9-8a)$$

$$q_{0s}^{(1)}(R_2) = \frac{1}{F_{10s}} = \frac{1}{\xi_{0s}^{(1)} \cdot J_0'(\xi_{0s}^{(1)})}, \quad (\Pi_9-8b)$$

$$\alpha_{0s}^{(1)} \cdot q_{0s}^{(1)}(R_2) = \frac{\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 1\right] \cdot \xi_{0s}^{(1)}}{\left[\frac{J_0'(\xi_{0s}^{(1)})}{J_0'(\xi_{0s}^{(1)} \frac{R_1}{R_2})}\right]^2 - 1} \cdot J_0'(\xi_{0s}^{(1)}), \quad (\Pi_9-8c)$$

а величины $\xi_{NS}^{(1)}$, являющиеся корнями уравнения (П₅-9), могут быть определены по формулам (П₅-10 и 11), где следует положить:

$$\rho = \frac{R_1}{R_2}, \quad m = 4N^2. \quad (\Pi_9-9)$$

2) Для спинки статора ($i=2$), согласно выражениям (П_{III}-44b, 42i и 17), имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_1^{(2)} &= R_3 \quad v_n^{(2)} = \frac{2n\pi}{T} = mn = N = \text{целому числу} \\ r_2^{(2)} &= R_2 \quad \kappa_k^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_{2z}}{\mu_2}} \cdot \frac{k\pi}{l} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_9-10)$$

Поэтому, вводя обозначения

$$x_{3k} = \kappa_k^{(2)} R_2, \quad x_{4k} = \kappa_k^{(2)} R_3, \quad (\Pi_9-11)$$

можно для входящих в формулы (П_{III}-45b) функций $P_{nk}^{(2)}(r)$, $R_{nk}^{(2)}(r)$ и $p_{00}^{(2)}(r)$ согласно равенствам (П_{III}-42e, f, g) с учетом (П₉-10 и 11) написать:

$$P_{nk}^{(2)}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_3}{\mu_2} \cdot \frac{1}{x_{4k}} \cdot \frac{I_N'(x_{3k}) \cdot K_N(x_k^{(2)} r) - K_N'(x_{3k}) \cdot I_N(x_k^{(2)} r)}{I_N'(x_{4k}) \cdot K_N'(x_{3k}) - I_N'(x_{3k}) \cdot K_N'(x_{4k})} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{R_3}{\mu_2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^N + \left(\frac{R_2}{r}\right)^N}{\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^N - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^N} \dots \left(\begin{aligned} &k=0 \\ &n \neq 0 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_9-12)$$

$$R_{nk}^{(2)}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{x_{3k}} \cdot \frac{I_N'(x_{4k}) \cdot K_N(x_k^{(2)} r) - K_N'(x_{4k}) \cdot I_N(x_k^{(2)} r)}{I_N'(x_{4k}) \cdot K_N'(x_{3k}) - I_N'(x_{3k}) \cdot K_N'(x_{4k})} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{R_2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_3}\right)^N + \left(\frac{R_3}{r}\right)^N}{\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^N - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^N} \dots \left(\begin{aligned} &k=0 \\ &n \neq 0 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_9-13)$$

$$p_{00}^{(2)}(r) = \frac{R_3}{\mu_2} \cdot \frac{R_2^2 \left(\ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} \right) + R_3^2 \left(\ln \frac{r}{R_3} + \frac{1}{2} \right)}{R_2^2 - R_3^2}. \quad (\Pi_9-14)$$

3) Для зубцового слоя ($i=3$), согласно (П_{III}-44c, 42i), имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_1^{(3)} &= R_4 \quad v_n^{(3)} = \sqrt{\frac{\mu_{3z}}{\mu_3}} \cdot \frac{2n\pi}{T} = v \neq \text{целому числу} \\ r_2^{(3)} &= R_3 \quad \kappa_k^{(3)} = \sqrt{\frac{\mu_{3z}}{\mu_3}} \cdot \frac{k\pi}{l} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_9-15)$$

Поэтому, вводя обозначения

$$x_{5k} = \kappa_k^{(3)} R_3, \quad x_{6k} = \kappa_k^{(3)} R_4, \quad (\Pi_9-16)$$

можно для входящих в формулы (П_{III}-45c) функций $P_{nk}^{(3)}(r)$, $R_{nk}^{(3)}(r)$ и $p_{00}^{(3)}(r)$ согласно равенствам (П_{III}-42e, f, g) с учетом выражений (П₉-15 и 16) написать:

$$P_{nk}^{(3)}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_4}{\mu_3} \cdot \frac{1}{x_{6k}} \cdot \frac{I_v'(x_{5k}) \cdot K_v(x_k^{(3)} r) - K_v'(x_{5k}) \cdot I_v(x_k^{(3)} r)}{I_v'(x_{6k}) \cdot K_v'(x_{5k}) - I_v'(x_{5k}) \cdot K_v'(x_{6k})} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{R_4}{\mu_3} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_3}\right)^v + \left(\frac{R_3}{r}\right)^v}{\left(\frac{R_4}{R_3}\right)^v - \left(\frac{R_3}{R_4}\right)^v} \dots \left(\begin{aligned} &k=0 \\ &n \neq 0 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_9-17)$$

$$R_{nk}^{(3)}(r) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{R_3}{\mu_3} \cdot \frac{1}{x_{5k}} \cdot \frac{I_v'(x_{6k}) \cdot K_v(x_k^{(3)} r) - K_v'(x_{6k}) \cdot I_v(x_k^{(3)} r)}{I_v'(x_{6k}) \cdot K_v'(x_{5k}) - I_v'(x_{5k}) \cdot K_v'(x_{6k})} \dots (k \neq 0) \\ &\frac{R_3}{\mu_3} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_4}\right)^v + \left(\frac{R_4}{r}\right)^v}{\left(\frac{R_3}{R_4}\right)^v - \left(\frac{R_4}{R_3}\right)^v} \dots \left(\begin{aligned} &k=0 \\ &n \neq 0 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (\Pi_9-18)$$

$$p_{00}^{(3)}(r) = \frac{R_4}{\mu_3} \cdot \frac{R_3^2 \left(\ln \frac{R_3}{r} - \frac{1}{2} \right) + R_4^2 \left(\ln \frac{r}{R_4} + \frac{1}{2} \right)}{R_3^2 - R_4^2}. \quad (\Pi_9-19)$$

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$

Для величин $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$ справедливы формулы (IV-9). Входящая в эти формулы функция $b_r(\vartheta, z)$, согласно равенствам (IV-5), имеет в зависимости от величины ϑ два разных выражения. Для использования этих выражений необходимо в формулах (IV-9) разделить интервал интегрирования на две части. Тогда вместо (IV-9) будем иметь:

$$\varphi_n(z) = \frac{2}{T} \int_{-\Theta_c}^{+\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta + \frac{2}{T} \int_{+\Theta_c}^{T-\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta, \quad (\text{П}_{10-1})$$

$$\chi_n(z) = \frac{2}{T} \int_{-\Theta_c}^{+\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \cdot \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta + \frac{2}{T} \int_{+\Theta_c}^{T-\Theta_c} b_r(\vartheta, z) \cdot \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П}_{10-2})$$

Все четыре интеграла, входящие в эти равенства, имеют одинаковый вид. Поэтому в целях сокращения вычислений целесообразно ввести обозначение

$$x_n^{(\alpha\beta)}(z) = \frac{2}{T} \int_a^b b_r(\vartheta, z) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta. \quad (\text{П}_{10-3})$$

Индексы α и β в этом выражении определяют точный вид интеграла и могут иметь по два значения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = c, \quad \alpha = \text{ю} \\ \beta = c, \quad \beta = s \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{10-3a})$$

Индекс α определяет пределы интегрирования и вид подынтегральной функции $b_r(\vartheta, z)$:

1) при $\alpha = c$ (северный полюс)

$$\left. \begin{aligned} a = -\Theta_c, \quad b = +\Theta_c \\ b_r(\vartheta, z) = [u_c(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(c)}(\vartheta, z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{10-4a})$$

2) при $\alpha = \text{ю}$ (южный полюс)

$$\left. \begin{aligned} a = +\Theta_c = \frac{T}{2} - \Theta_{\text{ю}}, \quad b = T - \Theta_c = \frac{T}{2} + \Theta_{\text{ю}} \\ b_r(\vartheta, z) = [u_{\text{ю}}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(\text{ю})}(\vartheta, z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{10-4b})$$

В связи с этим выражение для функции $b_r(\vartheta, z)$ можно представить в обобщенном виде:

$$b_r(\vartheta, z) = [u_{\alpha}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z). \quad (\text{П}_{10-4c})$$

Индекс β определяет вид тригонометрической функции $S_n^{(\beta)}(\vartheta)$ под интегралом и, следовательно, принадлежность этого интеграла к формулам (П₁₀₋₁ или 2):

1) при $\beta = c$ (косинусный интеграл)

$$S_n^{(c)}(\vartheta) = \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} \quad (\text{к формуле П}_{10-1}), \quad (\text{П}_{10-5a})$$

2) при $\beta = s$ (синусный интеграл)

$$S_n^{(s)}(\vartheta) = \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \quad (\text{к формуле П}_{10-2}). \quad (\text{П}_{10-5b})$$

С введением обозначения (П₁₀₋₃) формулы (П₁₀₋₁ и 2) могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= x_n^{(cc)}(z) + x_n^{(\text{ю}c)}(z) \\ \chi_n(z) &= x_n^{(cs)}(z) + x_n^{(\text{ю}s)}(z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{10-6})$$

Для определения величины $x_n^{(\alpha\beta)}(z)$ необходимо в формулу (П₁₀₋₃) подставить обобщенное выражение (П_{10-4c}) для функции $b_r(\vartheta, z)$:

$$x_n^{(\alpha\beta)}(z) = \frac{2}{T} \int_a^b [u_{\alpha}(\vartheta, z) - u(\vartheta, z)] \cdot \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) \cdot d\vartheta \quad (\text{П}_{10-7})$$

и затем, воспользовавшись выражениями (IV-7 и 8) для $u(\vartheta, z)$ и $u_c(\vartheta, z)$, привести равенство (П₁₀₋₇) к виду:

$$\begin{aligned} x_n^{(\alpha\beta)}(z) &= \frac{1}{2} [u_0^{(\alpha)}(z) - u_0(z)] \cdot \frac{2}{T} \int_a^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [u_m^{(\alpha)}(z) - u_m(z)] \cdot \frac{2}{T} \int_a^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T} \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [v_m^{(\alpha)}(z) - v_m(z)] \cdot \frac{2}{T} \int_a^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T} \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-8})$$

Поскольку удельная магнитная проводимость воздушного промежутка $\lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z)$ является известной (заданной) функцией, то все интегралы в выражении (П₁₀-8) могут быть доведены до численных выражений. Поэтому целесообразно для этих интегралов ввести обобщенное обозначение

$$\lambda_{nm}^{(\alpha\beta\gamma)}(z) = \frac{2}{T} \int_a^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{П}_{10-9})$$

в котором индекс γ определяет вид второй тригонометрической функции $S_m^{(\gamma)}(\vartheta)$ под интегралом:

$$1) \text{ при } \gamma = c \quad S_m^{(c)}(\vartheta) = \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T}, \quad (\text{П}_{10-10a})$$

$$2) \text{ при } \gamma = s \quad S_m^{(s)}(\vartheta) = \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T}. \quad (\text{П}_{10-10b})$$

Использование обозначения (П₁₀-9) позволяет привести равенство (П₁₀-8) к более простому виду:

$$\begin{aligned} x_n^{(\alpha\beta)}(z) = & \frac{1}{2} [u_0^{(\alpha)}(z) - u_0(z)] \cdot \lambda_{n0}^{(\alpha\beta c)}(z) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m^{(\alpha)}(z) - u_m(z)] \lambda_{nm}^{(\alpha\beta c)}(z) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [v_m^{(\alpha)}(z) - v_m(z)] \lambda_{nm}^{(\alpha\beta s)}(z). \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-11})$$

Поскольку потенциал полюса $u_\alpha(\vartheta, z)$ и его коэффициенты Фурье $u_m^{(\alpha)}(z)$ и $v_m^{(\alpha)}(z)$ в рассматриваемой задаче должны быть известными (заданными) величинами, то в выражении (П₁₀-11) можно выделить известные члены и, перегруппировав их, обозначить

$$\begin{aligned} f_n^{(\alpha\beta)}(z) = & \frac{1}{2} u_0^{(\alpha)}(z) \cdot \lambda_{n0}^{(\alpha\beta c)}(z) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m^{(\alpha)}(z) \cdot \lambda_{nm}^{(\alpha\beta c)}(z) + v_m^{(\alpha)}(z) \lambda_{nm}^{(\alpha\beta s)}(z)]. \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-12})$$

Тогда выражение (П₁₀-11) получит следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} x_n^{(\alpha\beta)}(z) = & f_n^{(\alpha\beta)}(z) - \frac{1}{2} u_0(z) \cdot \lambda_{n0}^{(\alpha\beta c)}(z) - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(\alpha\beta c)}(z) + v_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(\alpha\beta s)}(z)]. \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-13})$$

Подставляя это выражение в равенства (П₁₀-6) и приводя подобные члены, получим следующие выражения для искомым величин $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = & f_n^{(c)}(z) - \frac{1}{2} u_0(z) \cdot \lambda_{n0}^{(cc)}(z) - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(cc)}(z) + v_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(cs)}(z)], \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-14})$$

$$\begin{aligned} \chi_n(z) = & f_n^{(s)}(z) - \frac{1}{2} u_0(z) \cdot \lambda_{n0}^{(sc)}(z) - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(sc)}(z) + v_m(z) \cdot \lambda_{nm}^{(ss)}(z)], \end{aligned} \quad (\text{П}_{10-15})$$

где в целях упрощения обозначено

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nm}^{(cc)}(z) &= \lambda_{nm}^{(ccc)}(z) + \lambda_{nm}^{(\kappa c c)}(z) \\ \lambda_{nm}^{(cs)}(z) &= \lambda_{nm}^{(ccs)}(z) + \lambda_{nm}^{(\kappa c s)}(z) \\ \lambda_{nm}^{(sc)}(z) &= \lambda_{nm}^{(csc)}(z) + \lambda_{nm}^{(\kappa s c)}(z) \\ \lambda_{nm}^{(ss)}(z) &= \lambda_{nm}^{(css)}(z) + \lambda_{nm}^{(\kappa s s)}(z) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П}_{10-16})$$

$$\left. \begin{aligned} f_n^{(c)}(z) &= f_n^{(cc)}(z) + f_n^{(\kappa c)}(z) \\ f_n^{(s)}(z) &= f_n^{(cs)}(z) + f_n^{(\kappa s)}(z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{10-17})$$

Приложение 11

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ $\lambda_{nm}^{(\alpha\beta\gamma)}(z)$

Несмотря на сложность формы когтеобразного полюса, он обычно всегда оказывается симметричным относительно своей средней плоскости O_c или O_κ (см. рис. 79 или 80). Поэтому и удельная магнитная проводимость зазора $\lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z)$ должна, очевидно, обладать симметрией относительно оси соответствующего полюса. Так, для северного полюса, ось которого имеет координату $\vartheta = 0$, должно иметь место равенство

$$\lambda^{(c)}(-\vartheta, z) = \lambda^{(c)}(\vartheta, z). \quad (\text{П}_{11-1})$$

Аналогичным образом для южного полюса, координата оси которого равна $\vartheta = \frac{T}{2}$, будем иметь (см. рис. 80):

$$\lambda^{(\kappa)}(T - \vartheta, z) = \lambda^{(\kappa)}(\vartheta, z). \quad (\text{П}_{11-2})$$

В общем случае, когда ось полюса имеет координату ϑ_0 , а полярность полюса произвольна, можно написать:

$$\lambda^{(\alpha)}(2\vartheta_0 - \vartheta, z) = \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z). \quad (\Pi_{11-3})$$

В связи с этим представляется целесообразным в выражении (Π_{10-9}) разделить интервал интегрирования $[a, b]$ на две равные части: от a до $\vartheta_0 = \frac{a+b}{2}$ и от ϑ_0 до b . Тогда интеграл (Π_{10-9}) примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{nm}^{(\alpha\beta\gamma)}(z) = & \frac{2}{T} \int_a^{\vartheta_0} \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta + \\ & + \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta) \cdot S_n^{(\beta)}(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (\Pi_{11-4})$$

В первом интеграле удобно ввести подстановку

$$\vartheta = 2\vartheta_0 - x, \quad (\Pi_{11-5})$$

где x — новая переменная.

Заметив при этом, что

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \vartheta = a \dots x = 2\vartheta_0 - a = 2 \cdot \frac{a+b}{2} - a = b \\ \text{при } \vartheta = \vartheta_0 \dots x = 2\vartheta_0 - \vartheta_0 = \vartheta_0 \end{aligned} \right\} (\Pi_{11-5a})$$

и имея в виду равенство (Π_{11-3}) , нетрудно первый интеграл в выражении (Π_{11-4}) привести к виду:

$$\frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(x, z) \cdot S_m^{(\gamma)}(2\vartheta_0 - x) \cdot S_n^{(\beta)}(2\vartheta_0 - x) dx. \quad (\Pi_{11-6})$$

Так как для определенного интеграла обозначение независимой переменной, по которой производится интегрирование, не имеет никакого значения, то, изменяя в выражении (Π_{11-6}) x на ϑ и подставляя его вместо первого интеграла в равенстве (Π_{11-4}) , после небольших преобразований будем иметь:

$$\lambda_{nm}^{(\alpha\beta\gamma)}(z) = \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot S_m^{(\beta\gamma)}(\vartheta) d\vartheta, \quad (\Pi_{11-7})$$

где для краткости обозначено

$$S_m^{(\beta\gamma)}(\vartheta) = S_n^{(\beta)}(\vartheta) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta) + S_n^{(\beta)}(2\vartheta_0 - \vartheta) \cdot S_m^{(\gamma)}(2\vartheta_0 - \vartheta). \quad (\Pi_{11-8})$$

Поскольку координата оси полюса ϑ_0 при выбранной системе координат (см. рис. 80) может быть представлена в виде:

$$\text{для северных полюсов } \vartheta_0 = 0 + k'T,$$

$$\text{для южных полюсов } \vartheta_0 = \frac{T}{2} + k''T,$$

где k' и k'' — произвольные целые числа, то величина $2\vartheta_0$, очевидно, всегда будет кратна T :

$$2\vartheta_0 = kT. \quad (\Pi_{11-9})$$

С другой стороны, величины $S_n^{(\beta)}(\vartheta)$ и $S_m^{(\gamma)}(\vartheta)$ являются, как видно из равенств $(\Pi_{10-5a, b}$ и $10a, b)$, тригонометрическими функциями с периодом, равным $\frac{T}{n}$. Поэтому величина $2\vartheta_0$, равная $2\vartheta_0 = kT = kn \cdot \frac{T}{n}$, оказывается кратной периоду функций $S_n^{(\beta)}(\vartheta)$ и $S_m^{(\gamma)}(\vartheta)$, и поэтому ее прибавление (или вычитание) к аргументу ϑ этих функций не может изменить величины самих функций. На этом основании величину $2\vartheta_0$ в выражении (Π_{11-8}) можно просто опустить, и тогда будем иметь:

$$S_{nm}^{(\beta\gamma)}(\vartheta) = S_n^{(\beta)}(\vartheta) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta) + S_n^{(\beta)}(-\vartheta) \cdot S_m^{(\gamma)}(-\vartheta). \quad (\Pi_{11-10})$$

Продолжая анализ этого равенства, нетрудно прийти к выводу, что поскольку величины $S_n^{(\beta)}$ и $S_m^{(\gamma)}$ могут быть только синусоидальными или косинусоидальными функциями относительно ϑ , то, имея в виду, что $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$, $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$ в равенстве (Π_{11-10}) следует различать два случая:

1) обе функции $S_n^{(\beta)}$ и $S_m^{(\gamma)}$ одинаковы, например, обе они — косинусы или обе — синусы. При этом

$$\beta = \gamma, \quad S_{nm}^{(\beta\gamma)}(\vartheta) = 2S_n^{(\beta)}(\vartheta) \cdot S_m^{(\gamma)}(\vartheta), \quad (\Pi_{11-10a})$$

2) функции $S_n^{(\beta)}$ и $S_m^{(\gamma)}$ различны, например, одна из них — синус, другая — косинус, или наоборот. Тогда

$$\beta \neq \gamma, \quad S_{nm}^{(\beta\gamma)}(\vartheta) = 0. \quad (\Pi_{11-10b})$$

Таким образом, при наличии осевой симметрии когтеобразного полюса все величины $S_{nm}^{(\beta\gamma)}(\vartheta)$, а следовательно, согласно равенству (Π_{11-7}) , и все параметры $\lambda_{nm}^{(\alpha\beta\gamma)}(z)$, для которых

$\beta \neq \gamma$, оказываются равными нулю. Остаются поэтому только два вида параметров:

$$\lambda_{nm}^{(\alpha)}(z) = \lambda_{nm}^{(\alpha cc)}(z) = \frac{4}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2n\pi\vartheta}{T} \cdot \cos \frac{2m\pi\vartheta}{T} d\vartheta, \quad (\text{П}_{11-11a})$$

$$l_{nm}^{(\alpha)}(z) = \lambda_{nm}^{(\alpha ss)}(z) = \frac{4}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot \sin \frac{2n\pi\vartheta}{T} \cdot \sin \frac{2m\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П}_{11-11b})$$

Однако и эти два вида параметров можно привести к одному, если заметить, что как произведения косинусов, так и произведения синусов можно выразить через одни и те же слагаемые:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Ориентируясь на эти равенства, можно вместо формул (П_{11-11a} и b) написать:

$$\lambda_{nm}^{(\alpha)}(z) = \lambda_{(m-n)}^{(\alpha)}(z) + \lambda_{(m+n)}^{(\alpha)}(z), \quad (\text{П}_{11-12a})$$

$$l_{nm}^{(\alpha)}(z) = \lambda_{(m-n)}^{(\alpha)}(z) - \lambda_{(m+n)}^{(\alpha)}(z), \quad (\text{П}_{11-12b})$$

причем для величин, стоящих в правых частях этих равенств, имеет место одна общая формула

$$\lambda_p^{(\alpha)}(z) = \frac{2}{T} \int_{\vartheta_0}^b \lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2p\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П}_{11-13})$$

Из этого выражения нетрудно установить, что величина $\lambda_p^{(\alpha)}(z)$ является p -й гармоникой разложения функции $\lambda^{(\alpha)}(\vartheta, z)$ в ряд Фурье по косинусам относительно переменной ϑ .

В соответствии с формулами (П_{11-11a} , b) выражения (П_{10-16}) для величин $\lambda_{nm}(z)$ примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{nm}^{(cc)}(z) &= \lambda_{nm}^{(ccc)}(z) + \lambda_{nm}^{(coc)}(z) = \lambda_{nm}^{(c)}(z) + \lambda_{nm}^{(co)}(z) \\ \lambda_{nm}^{(cs)}(z) &= \lambda_{nm}^{(ccs)}(z) + \lambda_{nm}^{(cos)}(z) = 0 \\ \lambda_{nm}^{(sc)}(z) &= \lambda_{nm}^{(csc)}(z) + \lambda_{nm}^{(soc)}(z) = 0 \\ \lambda_{nm}^{(ss)}(z) &= \lambda_{nm}^{(css)}(z) + \lambda_{nm}^{(oss)}(z) = l_{nm}^{(c)}(z) + l_{nm}^{(co)}(z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{11-14})$$

Поэтому, вводя еще обозначения

$$\lambda_{nm}(z) = \lambda_{nm}^{(c)}(z) + \lambda_{nm}^{(co)}(z), \quad (\text{П}_{11-15a})$$

$$l_{nm}(z) = l_{nm}^{(c)}(z) + l_{nm}^{(co)}(z), \quad (\text{П}_{11-15b})$$

можно переписать равенства (П_{10-14} и 15) в более простом виде:

$$\varphi_n(z) = f_n^{(c)}(z) - \frac{1}{2} \lambda_{n0}(z) \cdot u_0(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm}(z) \cdot u_m(z), \quad (\text{П}_{11-16a})$$

$$\chi_n(z) = f_n^{(s)}(z) - \sum_{m=1}^{\infty} l_{nm}(z) \cdot v_m(z). \quad (\text{П}_{11-16b})$$

При этом для величин $f_n^{(c)}(z)$ и $f_n^{(s)}(z)$, согласно равенствам (П_{10-17} , 12) и (П_{11-11a} , b), будем иметь:

$$f_n^{(c)}(z) = \frac{1}{2} [\lambda_{n0}^{(c)}(z) \cdot u_0^{(c)}(z) + \lambda_{n0}^{(co)}(z) \cdot u_0^{(co)}(z)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda_{nm}^{(c)}(z) \cdot u_m^{(c)}(z) + \lambda_{nm}^{(co)}(z) \cdot u_m^{(co)}(z)], \quad (\text{П}_{11-17a})$$

$$f_n^{(s)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} [l_{nm}^{(c)}(z) \cdot v_m^{(c)}(z) + l_{nm}^{(co)}(z) \cdot v_m^{(co)}(z)]. \quad (\text{П}_{11-17b})$$

Приложение 12

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ Φ_{nk} И X_{nk}

Для определения коэффициентов Φ_{nk} и X_{nk} , согласно формулам (IV-18), необходимо иметь конкретные выражения для функций $\varphi_n(z)$ и $\chi_n(z)$. Пользуясь для этой цели равенствами (IV-10) и (П_{11-17a} , b), можно написать:

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2} [\lambda_{n0}^{(c)}(z) \cdot u_0^{(c)}(z) + \lambda_{n0}^{(co)}(z) \cdot u_0^{(co)}(z) - \lambda_{n0}(z) \cdot u_0(z)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda_{nm}^{(c)}(z) \cdot u_m^{(c)}(z) + \lambda_{nm}^{(co)}(z) \cdot u_m^{(co)}(z) - \lambda_{nm}(z) \cdot u_m(z)], \quad (\text{П}_{12-1})$$

$$\chi_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} [l_{nm}^{(c)}(z) \cdot v_m^{(c)}(z) + l_{nm}^{(co)}(z) \cdot v_m^{(co)}(z) - l_{nm}(z) \cdot v_m(z)]. \quad (\text{П}_{12-2})$$

Подставляя затем в эти равенства соотношения (IV-16 и 17), после приведения членов и изменения порядка суммирования по m и q будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [\lambda_{n0}^{(c)}(z) \cdot u_{00}^{(c)} + \lambda_{n0}^{(ю)}(z) \cdot u_{00}^{(ю)} - \lambda_{n0}(z) \cdot u_{00}] + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda_{nm}^{(c)}(z) \cdot u_{m0}^{(c)} + \lambda_{nm}^{(ю)}(z) \cdot u_{m0}^{(ю)} - \lambda_{nm}(z) \cdot u_{m0}] \Big\} + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} [\lambda_{n0}^{(c)}(z) \cdot u_{0q}^{(c)} + \lambda_{n0}^{(ю)}(z) \cdot u_{0q}^{(ю)} - \lambda_{n0}(z) \cdot u_{0q}] \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda_{nm}^{(c)}(z) \cdot u_{mq}^{(c)} + \lambda_{nm}^{(ю)}(z) \cdot u_{mq}^{(ю)} - \lambda_{nm}(z) \cdot u_{mq}] \Big\} \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l}, \end{aligned} \quad (\Pi_{12-3})$$

$$\begin{aligned} \chi_n(z) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [l_{nm}^{(c)}(z) \cdot v_{m0}^{(c)} + l_{nm}^{(ю)}(z) \cdot v_{m0}^{(ю)} - l_{nm}(z) \cdot v_{m0}] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [l_{nm}^{(c)}(z) \cdot v_{mq}^{(c)} + l_{nm}^{(ю)}(z) \cdot v_{mq}^{(ю)} - l_{nm}(z) \cdot v_{mq}] \right\} \times \\ & \times \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l}. \end{aligned} \quad (\Pi_{12-4})$$

Используя эти выражения для подстановки в равенства (IV-18) и вынося знаки суммирования за знак интеграла, нетрудно в полученных соотношениях выделить интегралы вида:

$$\Lambda_{nkmq}^{(\alpha)} = \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \lambda_{nm}^{(\alpha)}(z) \cdot \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \cdot \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \cdot dz, \quad (\Pi_{12-5})$$

$$L_{nkmq}^{(\alpha)} = \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} l_{nm}^{(\alpha)}(z) \cdot \cos \frac{k\pi(z-z_1)}{l} \cdot \cos \frac{q\pi(z-z_1)}{l} \cdot dz, \quad (\Pi_{12-6})$$

причем индекс α имеет тот же смысл, что и в приложениях 10 и 11, т. е. может означать северный полюс ($\alpha = c$), южный полюс ($\alpha = ю$) или поверхность статора (индекс α отсутствует).

Кроме того, по аналогии с равенствами (Π_{10-12} , 17) и (Π_{11-17a} , b) целесообразно в выражениях (IV-18) после подстановки соотношений (Π_{12-3} и 4) выделить и сгруппировать

слагаемые, не зависящие от потенциала на поверхности статора, т. е. от коэффициентов u_{mq} и v_{mq} . С этой целью можно обозначить

$$\begin{aligned} F_{nk}^{(c)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [\Lambda_{nk00}^{(c)} \cdot u_{00}^{(c)} + \Lambda_{nk00}^{(ю)} \cdot u_{00}^{(ю)}] + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\Lambda_{nkm0}^{(c)} \cdot u_{m0}^{(c)} + \Lambda_{nkm0}^{(ю)} \cdot u_{m0}^{(ю)}] \Big\} + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} [\Lambda_{nk0q}^{(c)} \cdot u_{0q}^{(c)} + \Lambda_{nk0q}^{(ю)} \cdot u_{0q}^{(ю)}] + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\Lambda_{nkmq}^{(c)} \cdot u_{mq}^{(c)} + \Lambda_{nkmq}^{(ю)} \cdot u_{mq}^{(ю)}] \Big\}, \end{aligned} \quad (\Pi_{12-7})$$

$$\begin{aligned} F_{nk}^{(s)} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [L_{nkm0}^{(c)} \cdot v_{m0}^{(c)} + L_{nkm0}^{(ю)} \cdot v_{m0}^{(ю)}] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [L_{nkmq}^{(c)} \cdot v_{mq}^{(c)} + L_{nkmq}^{(ю)} \cdot v_{mq}^{(ю)}]. \end{aligned} \quad (\Pi_{12-8})$$

С учетом этих обозначений искомые выражения для коэффициентов Φ_{nk} и X_{nk} могут быть написаны в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{nk} = & F_{nk}^{(c)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \Lambda_{nk00} u_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_{nkm0} u_{m0} + \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_{nk0q} u_{0q} \right) - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_{nkmq} u_{mq}, \end{aligned} \quad (\Pi_{12-9})$$

$$X_{nk} = F_{nk}^{(s)} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} L_{nkm0} v_{m0} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} L_{nkmq} v_{mq}. \quad (\Pi_{12-10})$$

Входящие в эти выражения коэффициенты Λ_{nkmq} и L_{nkmq} , согласно равенствам (Π_{11-15a} , b), (Π_{12-5} и 6), находятся в простой связи с коэффициентами $\Lambda_{nkmq}^{(c)}$; $\Lambda_{nkmq}^{(ю)}$; $L_{nkmq}^{(c)}$; $L_{nkmq}^{(ю)}$:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nkmq} &= \Lambda_{nkmq}^{(c)} + \Lambda_{nkmq}^{(ю)} \\ L_{nkmq} &= L_{nkmq}^{(c)} + L_{nkmq}^{(ю)} \end{aligned} \right\}. \quad (\Pi_{12-11})$$

С другой стороны, представляя произведения косинусов под интегралами (Π_{12-5} и 6) в виде суммы косинуса разности

и косинуса суммы аргументов, можно выражения (П₁₂₋₅ и 6) представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nkmq}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} [\Lambda_{nm(k-q)}^{(\alpha)} + \Lambda_{nm(k+q)}^{(\alpha)}] \\ L_{nkmq}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} [L_{nm(k-q)}^{(\alpha)} + L_{nm(k+q)}^{(\alpha)}] \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П}_{12-12})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nms}^{(\alpha)} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \lambda_{nm}^{(\alpha)}(z) \cdot \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{l} dz \\ L_{nms}^{(\alpha)} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} l_{nm}^{(\alpha)}(z) \cdot \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{l} dz \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П}_{12-13})$$

причем индекс s может быть равен $(k-q)$ или $(k+q)$.

Наконец, пользуясь равенствами (П_{11-12a} и b), можно выражения (П₁₂₋₁₃) придать еще такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nms}^{(\alpha)} &= \Lambda_{(m-n),s}^{(\alpha)} + \Lambda_{(m+n),s}^{(\alpha)} \\ L_{nms}^{(\alpha)} &= \Lambda_{(m-n),s}^{(\alpha)} - \Lambda_{(m+n),s}^{(\alpha)} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{П}_{12-14})$$

где

$$\Lambda_{ps}^{(\alpha)} = \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \lambda_p^{(\alpha)}(z) \cdot \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{l} dz, \quad (\text{П}_{12-15})$$

а величина $\lambda_p^{(\alpha)}(z)$ определяется формулой (П₁₁₋₁₃).

На основании равенств (П₁₂₋₁₄) выражения (П₁₂₋₁₂) примут вид:

$$\Lambda_{nkmq}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} [\Lambda_{(m-n),(k-q)}^{(\alpha)} + \Lambda_{(m-n),(k+q)}^{(\alpha)} + \Lambda_{(m+n),(k-q)}^{(\alpha)} + \Lambda_{(m+n),(k+q)}^{(\alpha)}], \quad (\text{П}_{12-16})$$

$$\begin{aligned} L_{nkmq}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} [\Lambda_{(m-n),(k-q)}^{(\alpha)} + \Lambda_{(m-n),(k+q)}^{(\alpha)} - \\ &- \Lambda_{(m+n),(k-q)}^{(\alpha)} - \Lambda_{(m+n),(k+q)}^{(\alpha)}]. \end{aligned} \quad (\text{П}_{12-17})$$

Эти выражения справедливы как для северного ($\alpha=c$) и южного ($\alpha=y$) полюсов, так и для поверхности статора (α отсутствует). В этом последнем случае на основании равенств (П₁₂₋₁₁, 16 и 17) можно написать:

$$\Lambda_{ps} = \Lambda_{ps}^{(c)} + \Lambda_{ps}^{(y)}, \quad (\text{П}_{12-18})$$

причем индекс p может иметь значения $(m-n)$ или $(m+n)$, а индекс s — значения $(k-q)$ или $(k+q)$.

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ Λ_{ps}

Помимо отмеченной в приложении 11 осевой симметрии котеобразного полюса в реальных машинах, обычно имеет место еще и полная идентичность формы северных и южных полюсов. Однако в отличие от обычных машин, северные и южные полюса котеобразного ротора расположены неодинаково: их острые концы направлены в разные стороны. В связи с этим в машинах с котеобразными полюсами имеет место особый вид симметрии, когда соответствующая некоторой точке A_c симметричная точка A_y располагается с другой стороны машины, находясь на таком же расстоянии a от торца пакета, как и точка A_c от другого торца (см. рис. 79). В точках A_c и A_y удельная магнитная проводимость воздушного зазора $\lambda(\vartheta, z)$ должна быть, очевидно, одинаковой:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(c)}(\vartheta, z) &= \lambda^{(y)}\left(\vartheta + \frac{T}{2}, l + 2z_1 - z\right) \\ \lambda^{(y)}(\vartheta, z) &= \lambda^{(c)}\left(\vartheta - \frac{T}{2}, l + 2z_1 - z\right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{13-1})$$

Кроме того, подобной же симметрией должна обладать и картина поля в зазоре, в частности положение нейтральной точки N (рис. 80). Поэтому для углов Θ_c и Θ_y , являющихся в общем случае функцией координаты z , можно, очевидно, написать:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_c(z) &= \Theta_y(l + 2z_1 - z) \\ \Theta_y(z) &= \Theta_c(l + 2z_1 - z) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{П}_{13-2})$$

Имея в виду равенства (П₁₃₋₁ и 2), можно привести второе равенство (IV-12) для p -й гармоники $\lambda_p^{(y)}(z)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \lambda_p^{(y)}(z) &= \frac{T}{2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \Theta_c(l + 2z_1 - z)} \lambda^{(c)}\left(\vartheta - \frac{T}{2}, l + 2z_1 - z\right) \times \\ &\times \cos \frac{2p\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{П}_{13-3})$$

Производя в этом интеграле замену переменных:

$$\vartheta' = \vartheta - \frac{T}{2}, \quad z' = l + 2z_1 - z, \quad (\text{П}_{13-4})$$

можно придать выражению (П₁₃₋₃) еще такой вид:

$$\lambda_p^{(k)}(l + 2z_1 - z') = \frac{2}{T} \int_0^{\Theta_c(z')} \lambda^{(c)}(\vartheta', z') \cdot \cos\left(\frac{2p\pi\vartheta'}{T} + p\pi\right) d\vartheta',$$

откуда, производя несложные тригонометрические преобразования и опуская штрихи у независимых переменных ϑ' и z' , получим:

$$\lambda_p^{(k)}(l + 2z_1 - z) = \cos p\pi \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\Theta_c(z)} \lambda^{(c)}(\vartheta, z) \cdot \cos \frac{2p\pi\vartheta}{T} d\vartheta. \quad (\text{П}_{13-5})$$

Сравнивая это выражение с первым равенством (IV-12), нетрудно прийти к выводу:

$$\lambda_p^{(k)}(l + 2z_1 - z) = \cos p\pi \cdot \lambda_p^{(c)}(z), \quad (\text{П}_{13-6a})$$

или, в ином виде,

$$\lambda_p^{(k)}(z) = \cos p\pi \cdot \lambda_p^{(c)}(l + 2z_1 - z). \quad (\text{П}_{13-6b})$$

Подставляя это соотношение в формулу (П₁₂₋₁₅), написанную для южного полюса ($\alpha = \text{ю}$), и производя замену переменной $z' = l + 2z_1 - z$, можно привести равенство (П₁₂₋₁₅) к виду:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ps}^{(k)} &= \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \cos p\pi \cdot \lambda_p^{(c)}(l + 2z_1 - z) \cdot \cos \frac{s\pi(z - z_1)}{l} dz = \\ &= -\cos p\pi \cdot \frac{2}{l} \int_{l+z_1}^{l+2z_1-z_2} \lambda_p^{(c)}(z') \cdot \cos \left[s\pi - \frac{s\pi(z' - z_1)}{l} \right] dz'. \quad (\text{П}_{13-7}) \end{aligned}$$

Имея в виду, что согласно рис. 75, $l = z_2 - z_1$ и производя простые преобразования, вместо (П₁₃₋₇) получим:

$$\Lambda_{ps}^{(k)} = \cos p\pi \cdot \cos s\pi \cdot \frac{2}{l} \int_{z_1}^{z_2} \lambda_p^{(c)}(z) \cdot \cos \frac{s\pi(z - z_1)}{l} dz, \quad (\text{П}_{13-8})$$

или согласно выражению (П₁₂₋₁₅), написанному для северного полюса ($\alpha = \text{с}$); вместо (П₁₃₋₈) будем иметь:

$$\Lambda_{ps}^{(k)} = \cos p\pi \cdot \cos s\pi \cdot \Lambda_{ps}^{(c)} = (-1)^{p+s} \cdot \Lambda_{ps}^{(c)}. \quad (\text{П}_{13-9})$$

Подставляя выражение (П₁₃₋₉) в (П₁₂₋₁₈), получим:

$$\Lambda_{ps} = [1 + (-1)^{p+s}] \Lambda_{ps}^{(c)}. \quad (\text{П}_{13-10})$$

Отсюда видно, что если p и s оба четные или оба нечетные, то

$$\Lambda_{ps} = 2\Lambda_{ps}^{(c)} \quad (\text{П}_{13-11a})$$

Если же p — четное, а s — нечетное или наоборот, то

$$\Lambda_{ps} = 0. \quad (\text{П}_{13-11b})$$

Переходя далее к анализу равенств (П₁₂₋₁₆ и 17) следует заметить, что если разность двух целых чисел ($m - n$) является, например, четным числом, то и их сумма ($m + n$), которую можно представить в виде:

$$(m + n) = (m - n) + 2n, \quad (\text{П}_{13-12})$$

будет, очевидно, также четным числом, ибо прибавление к четному числу ($m - n$) четного числа $2n$ дает в результате четное число. Аналогичным образом, если ($m - n$) является нечетным числом, то и ($m + n$) будет согласно равенству (П₁₃₋₁₂) нечетным числом. Поэтому если, например, индексы $p = m - n$, $s = k - q$ в равенствах (П₁₂₋₁₆ и 17) являются оба четными или оба нечетными, то такими же будут и все остальные индексы в формулах (П₁₂₋₁₆ и 17) ($p = m + n$, $s = k - q$; $p = m - n$, $s = k + q$; $p = m + n$, $s = k + q$), и тогда согласно равенству (П_{13-11a}) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{nmq} &= \Lambda_{(m-n), (k-q)}^{(c)} + \Lambda_{(m-n), (k+q)}^{(c)} + \\ &+ \Lambda_{(m+n), (k-q)}^{(c)} + \Lambda_{(m+n), (k+q)}^{(c)} \\ L_{nmq} &= \Lambda_{(m-n), (k-q)}^{(c)} + \Lambda_{(m-n), (k+q)}^{(c)} - \\ &- \Lambda_{(m+n), (k-q)}^{(c)} - \Lambda_{(m+n), (k+q)}^{(c)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П}_{13-13a})$$

Если же, наоборот, индексы $p = m - n$ и $s = k - q$ являются один четным, а другой — нечетным, то такими же будут и остальные индексы в формулах (П₁₂₋₁₆ и 17) и тогда согласно (П_{13-11b}) будем иметь:

$$\Lambda_{nmq} = L_{nmq} = 0. \quad (\text{П}_{13-13b})$$

Резюмируя изложенное, нетрудно прийти к выводу, что коэффициенты Λ_{nmq} и L_{nmq} оказываются неравными нулю только в том случае, когда сумма их индексов, взятых с произвольным знаком

$$\pm n \pm k \pm m \pm q \quad (\text{П}_{13-14})$$

оказывается четным числом. В этом случае определение коэффициентов можно выполнить по формуле (П_{13-13a}). Если же сумма (П₁₃₋₁₄) оказывается нечетной, то тогда согласно выражению (П_{13-13b}) коэффициенты Λ_{nmq} и L_{nmq} будут равны нулю.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава I. Краткие исторические сведения о развитии и практическом применении конструкции синхронной машины с когтеобразными полюсами	10
Глава II. Особенности синхронных машин с когтеобразными полюсами	65
Глава III. Магнитное поле в статоре синхронной машины с когте- образными полюсами	95
Глава IV. Магнитное поле в воздушном зазоре синхронной машины с когтеобразными полюсами	138
Глава V. Потоки рассеяния в машинах с когтеобразными полюсами	160
Глава VI. Геометрия когтеобразных полюсов	215
Литература	251
Приложения	254

Волдемар Волдемарович Апсит
СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ С КОГТЕОБРАЗНЫМИ
ПОЛЮСАМИ

Редактор А. Тейтельбаум. Технический редактор
Я. Пазглиц. Корректор Э. Амбайне. Сдано в набор
4 августа 1959 г. Подписано к печати 30 декабря
1959 г. Формат бумаги 60×92/16; 18,75 физ. печ. л.;
18,76 усл. печ. л.; 19,37 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз.
ЛТ 23156. Цена 14 руб. 70 коп.

Издательство Академии наук Латвийской ССР.
г. Рига, ул. Смильшу № 1

Отпечатано в типографии № 3 Управления
полиграфической промышленности Министерства
культуры Латвийской ССР, г. Рига, ул. Ленина
№ 137/139. Заказ № 1220
6R2. 12

Исправление ошибок

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
12	1-я снизу	[3]	[4]	Авт.
45	4-я сверху	признав	был признав	Ред.
48	1-я снизу	рис. 43 б	рис. 44 б	Лет.
74	7-я снизу	Φ	$\Phi_{\sigma m}$	Типогр.
95	3-я снизу	B	B_z	"
119	13-я снизу	$u(r)$	$u_{nk}(r)$	"
132	3-я снизу	$h_{00}^{(i)}$	$h_{0,0}^{(i)}(r)$	"
173	11-я снизу	ζ	ζ_a	"
183	7-я снизу	$(F_{NS} + 2H_{nr}R)$	$(F_{NS} + 2H_{nr}R)$	Авт.
191	8-я и 9-я снизу	плоскость вершин	плоскость ζ вершин	"
193	7-я сверху	$(V-35a \text{ и } 36b)$	$(V-35a \text{ и } b)$	"
202	5-я сверху	$\frac{1}{\pi} [$	$\frac{1}{\pi} [$	Типогр.
207	2-я снизу	машины	машине	"
208	13-я снизу	на модели	δ_m на модели	"
225	10-я снизу	хорде полюсной	хорде B_n полюсной	Авт.
235	12-я сверху	$\frac{k}{n}$	$\frac{k}{\sigma_n}$	Типогр.
251	4-я сверху	Jan. 5.	Jan. 5, 1889.	Ред.
264	8-я сверху	$-u_n _{z_2} \sin 0]$	$-u_n _{z_1} \sin 0]$	Корр.
267	10-я сверху	$= \Lambda_s Q_s$	$= \Lambda_s Q_s$	Авт.
269	2-я снизу	$-\frac{v_2^2}{r} Q_s$	$-\frac{v_2^2}{r} Q_{vs}$	Типогр.
272	1-я сверху	$\left(\lambda_{vs} + \frac{v_n^2}{r_2^2} \right) Q_{vs}^2(r_2)$	$\left(\lambda_{vs} - \frac{v_n^2}{r_2^2} \right) Q_{vs}^2(r_2)$	Корр.
275	10-я сверху	$\varphi(r)$	$\varphi_{2n}(r)$	Типогр.
292	6-я сверху	$-\lambda_{no}(z) \cdot U_{oq} \} +$	$-\lambda_{no}(z) \cdot U_{oq} \} +$	Корр.

В. Апсит. Синхронные машины с когтеобразными полюсами